

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Федорова Анна Алексеевна

Магистерская диссертация

**Сравнительный анализ методов мониторинга
накопителей большой емкости**

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа

Методы прикладной математики и информатики в задачах управления

Научный руководитель,
доктор физ. – мат. наук,
профессор
Андрианов С. Н.

Рецензент,
кандидат физ. – мат. наук,
Викулина Ю. И.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение	4
Постановка задачи	10
Обзор литературы	13
1 Электрохимическая модель ячейки	23
1.1 Основные понятия и определения	23
1.2 Работа ячеек на электрохимическом уровне	25
1.3 Литий-ионные ячейки	27
1.4 Механизмы старения ячеек	29
2 Метод эквивалентной цепи	31
2.1 Напряжение разомкнутой цепи	31
2.2 Состояние заряда	32
2.3 Эквивалентное последовательное сопротивление	34
2.4 Диффузионное напряжение	35
3 Состояние «здоровья» ячейки	40
3.1 Емкость	40
3.2 Эквивалентное последовательное сопротивление	43
4 Фильтр Калмана	44
4.1 Оценка состояния системы	44
4.2 Последовательно-вероятностный подход	45
4.3 Обозначения	48
4.4 Минимизация среднеквадратичной ошибки	49
4.5 Основные шаги фильтра Калмана	51
4.6 Extended Kalman Filter	55
4.7 Sigma-Point Kalman Filter	60

4.8	Dual Kalman Filter	66
4.8.1	Dual Extended Kalman Filter	67
4.8.2	Dual Sigma-Point Kalman Filter	69
5	Метод наименьших квадратов	73
5.1	Weighted Ordinary Least Squares	73
5.2	Weighted Total Least Squares	77
5.3	Статистический критерий	80
5.4	Доверительный интервал	81
5.5	Упрощения метода Weighted Total Least Squares	82
5.5.1	Proportional Total Least Squares	82
5.5.2	Approximate Weighted Total Least Squares	85
6	Мониторинг накопителей	91
6.1	Экспериментальные данные	91
6.2	Оборудование и программное обеспечение	91
6.3	Метод эквивалентной цепи и Dual Kalman Filter	91
6.3.1	Обеспечение сходимости Dual Kalman Filter	94
6.3.2	Dual Extended Kalman Filter	95
6.3.3	Dual Sigma-Point Kalman Filter	97
6.3.4	Сравнительный анализ	98
6.4	Методы эквивалентной цепи и наименьших квадратов	100
6.4.1	Оценка текущей емкости	101
6.4.2	Инициализация метода наименьших квадратов	101
6.4.3	Сравнительный анализ	102
	Выводы	112
	Заключение	114
	Список литературы	116

Введение

Появление первого накопителя энергии восходит к 250 г. до н.э., – период Персидской империи в Багдаде, где много веков спустя археологами были найдены глиняные сосуды, служащие когда-то гальваническими элементами [48]. Внутри сосудов располагались медные цилиндры с торчащими из них железными стержнями, залитые органическим кислым раствором. Такой тип батарей был способен обеспечивать ток силой 250 мА при напряжении 250 мВ в течение 200 часов и использовался для гальванического покрытия серебра.

Но только в конце XVII в. ученые стали проводить серьезные эксперименты по производству электроэнергии и ее хранению. В 1791 г., два итальянских ученых, Алессандро Вольта (1745 – 1827 гг.) и Луиджи Гальвани (1737 – 1798 гг.), независимо друг от друга проводили эксперименты на мертвых лягушках с использованием различных металлов, которые заставляли сокращаться мышцы лапок амфибий [45]. Так, А. Вольта пришел к выводу, что сокращение мышц конечностей связано с используемым им в экспериментах металлом, но не с внутренним строением тела лягушки; Л. Гальвани в свою очередь заключил, что существует такая вещь как «животное электричество», которое, даже после смерти животного, сохраняется в его нервах и мышцах.

Для доказательства своей теории, в 1800 г. А. Вольта изобрел, а затем и запатентовал устройство для получения электричества, в дальнейшем получившее название «Вольтов столб» или «элемент Вольта» [3]. По своей сути это устройство является прародителем современных накопителей энергии. Первый Вольтов столб состоял из последовательно нанизанных на проволоку чередующихся круглых медных и цинковых пластин, между которыми располагались куски ткани или картона, смоченные в соляном растворе, способствующие прохождению электрического тока. За счет сво-

ей конструкции, «элемент Вольта» был способен обеспечить непрерывный поток электричества, что до этого момента не представлялось возможным.

Работы А. Вольта послужили основой многих дальнейших изобретений в области накопителей электроэнергии. Однако главным несовершенством всех батарей тех лет являлось накопление газа на электродах, что существенно ограничивало доступную емкость батареи. Так было вплоть до 1866 г., пока французский инженер Жорж Лекланше (1839 – 1882 гг.) не разрешил данную проблему, изобретя и запатентовав «ячейку Лекланше» [6].

Первая «ячейка Лекланше» была собрана в пористом горшке, внутри которого Ж. Лекланше использовал в качестве электролита раствор хлорида аммония, положительный электрод состоял из диоксида марганца, смешанного с небольшим количеством углерода, а отрицательный электрод представлял собой цинковый стержень. Такая структура вращалась вокруг графитовой пластины, служащей токоприемником. С помощью своего изобретения Ж. Лекланше мог получать 1.4 В напряжения с каждой ячейки. В дальнейшем «ячейка Лекланше» получила широкое применение в телеграфии и активно использовалась в электрических колоколах. «Ячейка Лекланше» является родоначальником современных цинк-углеродных и цинк-марганцевых батарей, которые на сегодняшний день являются самыми продаваемыми неперезаряжаемыми батареями [14].

Исследования поведения различных металлов в разбавленной серной кислоте позволили в 1859 г. Гастону Планте (1834 – 1889 гг.) создать первый свинцовый аккумулятор [7]. Батарея Г. Планте состояла из последовательных тонких слоев свинца, между которыми располагались пласты грубой ткани. Такая конструкция, напоминающая по своей форме сандвич, помещалась в цилиндрический контейнер, наполненный раствором разбавленной серной кислоты. Слои свинца были соединены как два отдельных электрода, разность напряжений которых позволяла заряжать аккумуля-

тор. Чередую процесс заряда и разряда аккумулятора в течение 24-х часов, Г. Планте получал положительный электрод, состоящий из диоксида свинца, и отрицательный электрод, образованный тонко распределенным свинцом, тем самым увеличивая номинальное напряжение ячейки до 2.7 В. Одним из первых применений батарей такого типа была установка домашнего освещения с динамо-машиной. Принципиальным отличием батареи Г. Планте от «ячейки Лекланше» является способность первой быть перезаряжаемой. Также отметим, что сегодня свинцово-кислотная химия батарей, предложенная Г. Планте, активно используется для производства автомобильных аккумуляторов.

В первой половине XX века Вальдмар Юнгнер (1869 – 1924 гг.) и Томас Эдисон (1847 – 1931 гг.) стали родоначальниками никель-кадмиевой [12] и никель-железной [16] химий перезаряжаемых батарей соответственно. Основной их идеей было использование щелочного раствора вместо кислотного в качестве электролита, что позволило применять широкий спектр металлов для изготовления электродов и получать высокий ток нагрузки. Номинальное напряжение одной ячейки составляло 1.4 В. Использование такого типа аккумуляторов сегодня ограничено по многочисленным экологическим причинам, поэтому они применяются только там, где использование других систем не представляется возможным, например, в устройствах, характеризующихся большими зарядными и разрядными токами (трамваях и троллейбусах для питания цепей управления).

В начале Второй мировой войны Самюэль Рубен (1900 – 1988 гг.), американский изобретатель и один из основателей компании «Дюраселл» (Duracell), запатентовал новую твердотельную технологию производства батарей, что послужило началом новой эры в производстве аккумуляторов [18]. Ртутные батареи С. Рубена, благодаря своим малым размерам, позволили создавать компактные портативные электронные устройства. Однако сегодня производство и эксплуатация ртутных элементов в большинстве

стран мира запрещена. Ртутные аккумуляторы полностью вытеснены более экологичными, так как проблема их утилизации достаточно сложна.

Литиевые аккумуляторы впервые были предложены британским химиком Стенли Уиттингемом (1941 г.р.) в 70-х гг. прошлого века [51]. В своем изобретении С. Уиттингем использовал сульфид титана и литий в качестве электродов. Однако производство такого рода литий-титанатных батарей являлось не только дорогостоящим процессом (синтез титана стоил порядка 1000 американских долларов за килограмм сырья), но и небезопасным для экологии (в процессе производства такого типа аккумуляторов выделяется большое количество сероводорода). Таким образом, в последующих исследованиях ученые отказались от использования полностью литиевых электродов и перешли к разработке батарей, в которых используются литиевые соединения [9], [41]. Этот момент считается началом эпохи производства литиевых аккумуляторов, которые обладают высокой энергетической плотностью (емкостью), низким саморазрядом и не требуют сервисного обслуживания.

Так, вот уже почти в течение 50 лет, химия литий-ионных батарей совершенствуется ежегодно. Сегодня производятся литий-ионные ячейки с номинальным напряжением, лежащим в диапазоне от 3.4 В до 4.4 В, что позволяет удовлетворять почти все потребности пользователей как бытовой техники, так и тяжелой промышленности и вытесняет другие типы аккумуляторов с рынка. Отметим, что по состоянию на 2016 г. производство литий-ионных батарей составляло 28 ГВтч, из которых 16.4 ГВтч были изготовлены в Китае, что значительно превышает показатели выпуска прочих типов аккумуляторов [43].

Активное производство литий-ионных батарей послужило началом исследований в области мониторинга перезаряжаемых литий-ионных накопителей энергии. Значительно вырос спрос к алгоритмам, позволяющим производить оценку состояния заряда, доступной мощности и количества

энергии в реальном времени, то есть не требующим при этом вывода батареи из эксплуатации. Потребность в таких методах обусловлена в первую очередь вопросами безопасной эксплуатации аккумуляторов. Так, некорректное определение доступной мощности или количества энергии может привести к преждевременному сгоранию батареи, вызванному некорректными высокими токами нагрузками.

В данном исследовании будут подробно рассмотрены и изучены задачи мониторинга литий-ионных аккумуляторов.

В первой главе мы рассмотрим электрохимическую модель ячейки. Основная задача главы – познакомить читателя с процессами, протекающими внутри батарей на электрохимическом уровне и играющими важную роль при накоплении энергии.

Вторая глава посвящена методу эквивалентной цепи, позволяющему построить математическую State-Space (SS) модель ячейки, описывающую основные электрохимические процессы. В первом параграфе делается предположение, что напряжение ячейки постоянно и не зависит от ее предыдущих состояний. Во втором параграфе вводится динамическая модель, позволяющая описать изменения состояния заряда батареи. Расширение SS-модели, вводимое в третьем параграфе, описывает динамическое поведение ячейки при воздействии на нее переменного тока. В четвертом параграфе рассматривается математическая модель, учитывающая эффект поляризации – противодействие, возникающее при прохождении тока через электролит и имеющее место во всех современных химиях литий-ионных батарей.

В третьей главе подробно рассмотрены два важнейших параметра батареи: внутреннее сопротивление и емкость, используемые для определения доступной мощности и количества энергии соответственно. Оба параметра используются для оценки «здоровья» батареи, что послужило названием к главе.

В четвертой главе приведены основы фильтра Калмана. В первых четырех параграфах ставится задача, для решения которой используется фильтр Калмана, и вводятся необходимые определения для формализации шагов алгоритма. Пятый параграф посвящен основным шагам фильтра Калмана, используемого для линейных стационарных систем. В шестом и седьмом параграфах рассматриваются две модификации фильтра Калмана: Extended Kalman Filter и Sigma-Point Kalman Filter, применяемые в случае нелинейных стационарных SS-моделей системы. Расширением данных подходов является Dual Kalman Filter, используемый для нелинейных нестационарных SS-систем. Dual Kalman Filter рассматривается в седьмом параграфе. В шестой главе будет показано, как с его помощью произвести оценку состояния заряда и «здоровья» ячейки.

В пятой главе рассматриваются основные положения метода наименьших квадратов, а также выводятся алгоритмы, являющиеся упрощениями метода и допускающие рекурсивную реализацию, что позволяет использовать их во встраиваемых системах реального времени. Кроме того, в третьем и четвертом параграфах главы вводятся понятия статистического критерия и доверительного интервала для оценки качества предоставляемого алгоритмом результата. Рассмотренные в данной главе методы будут использованы для оценки текущей емкости ячейки в главе шесть.

Шестая глава исследования посвящена практической реализации подходов, рассмотренных в предыдущих главах. Показана допустимость и обоснованность применения и продемонстрирована реализация фильтра Калмана, методов эквивалентной цепи и наименьших квадратов для оценки величин, позволяющих обеспечить непрерывный мониторинг батарей. В третьем и четвертом параграфах главы приведен сравнительный анализ результатов.

Постановка задачи

В современном технологическом обществе литий-ионные аккумуляторы используются в большом количестве приложений:

- портативные электронные устройства с малой мощностью (≈ 1 мВт – 10 Вт);
- мощный электротранспорт (≈ 1 кВт);
- сверхмощные системы хранения электроэнергии (≈ 1 МВт), появившиеся не так давно на энергетическом рынке.

Каждому из этих приложений необходима система управления батареями (СУБ), которая была бы способна в реальном времени предоставлять точную информацию как о состоянии заряда батареи, так и об имеющейся в распоряжении владельца аккумулятора доступной емкости.

СУБ играет важнейшую роль в обеспечении надежной работы аккумулятора, увеличивая возможности накопителя и продлевая его общий срок службы, предоставляя пользователю своевременную информацию о состояниях заряда и «здоровья» накопителя. СУБ должна отвечать аппаратным и системным требованиям, благодаря которым батарея постоянно поддерживается в безопасном состоянии. В основе каждой СУБ лежит система мониторинга накопителей (см. Рис. 1), которая выполняет следующие задачи:

1. Измерение тока и напряжения на шинах и ячейках;
2. Контроль уровня заряда, напряжения, силы тока;
3. Обмен информацией между СУБ и устройством;
4. Балансировка ячеек;

5. Оценка состояния батареи в реальном времени;
6. Бортовая диагностика аккумулятора.

Высокий спрос к СУБ побудил исследователей к разработке передовых алгоритмов реального времени оценки состояния аккумуляторов, так как не существует приборов для измерения характеристик, представляющих пользовательский интерес.

Реализация эффективного и надежного алгоритма мониторинга батарей необходима для управления имеющейся энергией и мощностью. Одной из распространенных проблем, с которой плохо справляются многие алгоритмы, является изменчивость большого числа характеристик аккумуляторов, таких как емкость и внутреннее сопротивление. Отсюда возникает потребность в разработке адаптивного алгоритма, подстраивающегося под перечисленные изменения, при этом сохраняющего качество оценки состояния.



Рис. 1: Схематическое представление системы управления батареями электромобиля

Целью данного исследования является сравнительный анализ и расширение существующих алгоритмов оценки состояния накопителей для дальнейшего их использования в современных СУБ и возможности их реализации на различных программно-аппаратных платформах.

Обзор литературы

Ранее было отмечено, что одной из целей данного исследования является сравнительный анализ алгоритмов оценки состояния накопителей. Далее под оценкой состояния аккумулятора будем понимать нахождение точного значения следующих величин: состояния заряда, емкости и внутреннего сопротивления. Текущий обзор состоит из трех основных частей, в каждой из которых рассмотрим существующие подходы к оценке одного из состояний накопителя.

Оценка состояния заряда

В данной части рассмотрим различные подходы к оценке состояния заряда аккумулятора. Все существующие алгоритмы для решения данной задачи могут быть разделены на две основные группы прямых и косвенных методов. К прямым методам, как правило, относят Кулоновский расчет и метод инверсии кривой напряжения разомкнутой цепи, то есть, алгоритмы, используемые для оценки состояния заряда в автономном режиме. Группу косвенных методов составляют алгоритмы, не требующие остановки процесса эксплуатации батареи.

Кулоновский расчет

Кулоновский расчет является легко реализуемым методом оценки состояния заряда батареи. Для его реализации требуется знание состояния заряда аккумулятора в начальный момент времени t_0

$$SOC(t) = SOC(t_0) - \frac{\eta}{Q} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $SOC(t)$ – состояние заряда батареи в момент t , η – коэффициент кулоновской эффективности, Q – начальная емкость накопителя, $i(\tau)$ – ток, протекающий через аккумулятор в момент τ .

К основным недостаткам данного подхода следует отнести:

1. Необходимость знать состояние заряда аккумулятора в начальный момент времени t_0 для корректного вычисления величины интеграла;
2. Подавление погрешностей, возникающих из-за неточностей измерительных датчиков, в сигнале тока с использованием данного алгоритма невозможно;
3. Переоценивание или недооценивание истинного значения состояния заряда может возникать в силу стоящей в знаменателе величины номинальной емкости.

Преимуществом кулоновского расчета является простота его реализации.

Метод инверсии кривой напряжения разомкнутой цепи

Оценка состояния заряда может быть осуществлена с использованием заранее известного отношения между напряжением разомкнутой цепи и состояния заряда батареи [5] (см. Рис. 2). Однако для реализации данного алгоритма требуется провести длительный эксперимент, в ходе которого накопитель энергии в течение продолжительного времени должен быть выведен из эксплуатации для определения обозначенного выше отношения, что делает невозможным применение данного подхода в реальном времени. Кроме того, метод инверсии кривой напряжения разомкнутой цепи не применим для некоторых химических аккумуляторов, например, литий-железо-фосфатных, для которых вид кривой, аналогичной представленной на Рис. 2, имеет продолжительную постоянную часть, что приводит к большим отклонениям в оценке состояния заряда [27].

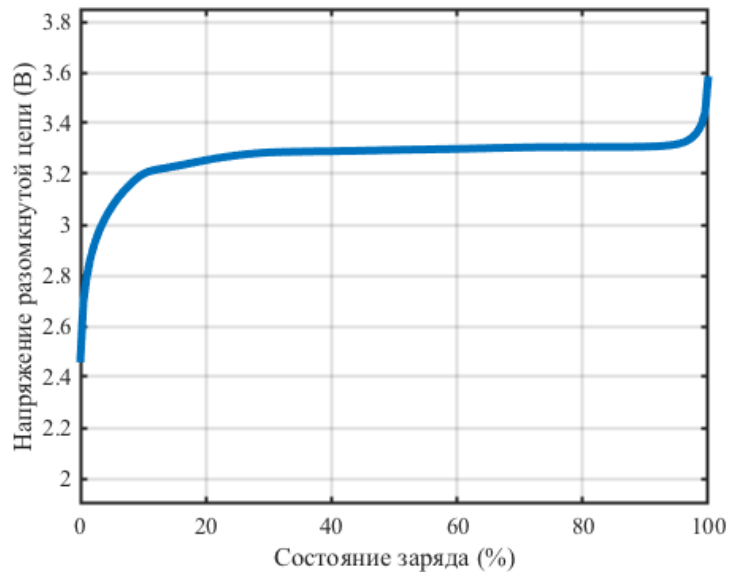


Рис. 2: Пример кривой отношения напряжения разомкнутой цепи к состоянию заряда для литий-ионной батареи

Справочная таблица

Реализация данного алгоритма подразумевает создание специального типа справочных таблиц, содержащих в себе значения состояния заряда аккумулятора при различных условиях его эксплуатации. Например, в [13] и [8] предлагается вычислить значения функции

$$SOC = f(V, i, T),$$

где SOC – состояние заряда, V – напряжение, i – ток, T – температура, в начальный момент эксплуатации батареи, и занести значения функции в таблицу, на основе которой в дальнейшем строится интерполяционный алгоритм оценки состояния заряда. Алгоритм, в основе которого заложена справочная таблица, не требует больших вычислительных мощностей, что является его главным преимуществом. Однако использование справочных таблиц не является универсальным методом, так как требует вычисления табличных значений для каждой конкретной химии аккумулятора. Более того, данный подход не учитывает фактор старения батареи, который оказывает существенное влияние на значения тока и напряжения.

Оценка на основе внутреннего сопротивления

Аналогично методу инверсии кривой напряжения разомкнутой цепи, в основе алгоритма оценки состояния заряда на основе внутреннего сопротивления лежит вычисление отношения между внутренним сопротивлением и состоянием заряда аккумулятора [52]. Однако, в [49] было показано, что внутреннее сопротивление батареи подвержено сильному влиянию внешних факторов, таких как температура и сила тока, что приводит к зашумленным оценкам состояния заряда. Более того, чувствительность внутреннего сопротивления к состоянию заряда гораздо ниже, чем к температуре, поэтому для реализации данного подхода требуется высокоточная система измерения температуры. Кроме этого, оценка состояния заряда на основе внутреннего сопротивления не возможна для больших аккумуляторных батарей, где при быстрых изменениях температура распределяется неравномерно.

Наблюдатели

Адаптивные наблюдатели также используются для оценки состояния заряда аккумуляторов. Например, в [46] авторы предлагают новый вид наблюдателя, для вывода которого были использованы погрешности измерений в отношении напряжения разомкнутой цепи к состоянию заряда. Данные алгоритмы просты в реализации и обладают высокой степенью точности. Однако они не адаптируются к изменяющимся во времени характеристикам аккумулятора, к которым относятся внутреннее сопротивление и емкость.

Фильтр Калмана

Фильтр Калмана – это рекурсивный алгоритм, позволяющий выполнить идентификацию динамической системы [22]. Он используется в широком спектре дисциплин, включающих управление энергией и мощностью ак-

кумуляторных энергосистем. Фильтр Калмана, не включающий дополнительных изменений, используется для работы с простыми линейными моделями батарей. Например, в [17] авторы используют данный подход для получения отношения значений кривой напряжения разомкнутой цепи к состоянию заряда накопителей в реальном времени, которое в дальнейшем используется для оценки текущего состояния заряда аккумулятора.

Так как модель накопителя не является простой линейной системой, то для оценки ее состояния используют расширения фильтра Калмана. Таковым является, например, Extended Kalman Filter (EKF) [44], в основе которого лежит линеаризация модели аккумулятора в текущий момент времени. Отметим, что недостатками EKF являются возникновение неточностей в процессе линеаризации модели и изменение с течением времени характеристик шума, использующихся при инициализации алгоритма.

Еще одним расширением фильтра Калмана для нелинейных систем является Sigma-Point Kalman Filter (SPKF) [21]. Основная идея SPKF состоит в генерации специального набора σ -точек в начале каждого шага алгоритма, которые используются для вычисления состояния системы.

Главным недостатком всех методов, в основе которых лежит фильтр Калмана, является требование инициализации априорных значений параметров модели и ковариационных матриц процесса и шумов с высокой степенью точности. Некорректная инициализация таких методов приводит к расхождению алгоритма в целом или к очень медленному процессу его сходимости.

Оценка текущей емкости

Емкость аккумулятора – это количество энергии, которую батарея способна предоставить будучи полностью заряженной (состояние заряда достигает максимальной отметки в 100%). Развитие производства в области

изготовления накопителей энергии привело к тому, что начальные емкости аккумуляторов одинаковой химии и размеров практически совпадают. Однако с течением времени, в силу различных условий эксплуатации и хранения батарей, их емкости уменьшаются с различной скоростью. Поэтому очень важно иметь возможность контролировать изменение емкости для предотвращения нехватки электроэнергии.

В литературе встречаются два основных типа алгоритмов оценки текущей емкости: автономные методы, требующие вывода батареи из эксплуатации, и подходы реального времени, использующие только измеряемые данные с накопителя.

Автономные алгоритмы

Простейшим автономным алгоритмом измерения текущей емкости батареи является полный заряд (от 0% до 100%), а затем разряд (от 100% до 0%) аккумулятора. В данном случае текущая емкость вычисляется как количество заряда, предоставляемого батареей во время разряда.

Также к автономным методам относятся Incremental Capacity Analysis (ICA) [50] и Differential Voltage Analysis (DVA) [11]. Данные подходы включают в себя заряд и разряд батареи малой силой тока. Затем строятся Incremental Capacity (IC) и Differential Voltage (DV) кривые как градиент количества заряженного (разряженного) количества заряда по отношению к напряжению ячейки и наоборот соответственно. Эти кривые в дальнейшем используются для выявления основных электрохимических свойств батареи.

Алгоритмы реального времени

Простым в реализации алгоритмом реального времени является вычисление текущей емкости с использованием кулоновского расчета. Для этого необходимо выразить емкость Q из формулы (1). Однако для этого требуется знание незашумленных значений состояния заряда и тока.

Также при наличии шумов в сигнале текущая емкость батареи может быть вычислена с использованием методов, в основе которых лежит фильтр Калмана, таких как Joint Extended Kalman Filter (JEKF) и Joint Sigma-Point Kalman Filter (JSPKF) [10]. Здесь емкость рассматривается как медленно изменяющийся параметр модели системы. Главным недостатком такого подхода являются большие вычислительные затраты, связанные с обращением матриц.

Метод наименьших квадратов послужил основой для еще одной группы алгоритмов реального времени для оценки текущей емкости батареи [20]. Данный подход включает в себя набор простейших математических операций, что предоставляет возможность реализации таких алгоритмов во встраиваемых системах.

Оценка внутреннего сопротивления

Знание внутреннего сопротивления аккумулятора позволяет качественно оценить состояние батареи и предотвратить такие нежелательные явления, как короткое замыкание или необходимость повторной балансировки ячеек. Во время эксплуатации аккумулятора внутреннее сопротивление непрерывно изменяется в силу внутренних и внешних факторов. Ко внутренним факторам принято относить состояние заряда и тепловыделение, возникающее в результате омического сопротивления. Внешние факторы включают в себя температуру окружающей среды и историю эксплуатации батареи.

Так же как и методы оценки емкости батареи, алгоритмы оценки внутреннего сопротивления в литературе разделяют на две основные группы: автономные методы, требующие вывода аккумулятора из эксплуатации, и подходы реального времени, использующие только измеряемые данные с накопителя.

Автономные алгоритмы

Простейшим способом определения внутреннего сопротивления аккумулятора является проведение теста с использованием ступенчатого постоянного тока с целью получения ответной реакции в виде сигнала напряжения [38]. Затем внутреннее сопротивление батареи вычисляется по закону Ома. Однако такой «грубый» подход не позволяет полностью охарактеризовать сложные химические реакции, возникающие внутри накопителя. Поэтому данный метод используют только в тех приложениях, где знание точного значения внутреннего сопротивления аккумулятора не является необходимым.

Электрохимическая импедансная спектроскопия (ЭИС) – широко используемый подход для описания внутренних процессов батареи, происходящих при разных временных постоянных на разных частотах [39]. Общая идея метода заключается в подаче синусоидального сигнала на аккумулятор с целью вычисления внутреннего сопротивления при помощи отклика, полученного с накопителя. Однако, в силу линейности такого подхода, при подсчете внутреннего сопротивления аккумулятора не учитываются влияния тока и температуры.

Алгоритмы реального времени

Электрохимическая динамика батареи может быть описана при помощи системы, состоящей из уравнений в частных производных. Например, в [25]

авторы используют комбинированный подход, состоящий из наблюдателя в частных производных и метода наименьших квадратов. Благодаря этому алгоритму исследователи получили возможность одновременной оценки как состояния заряда, так и внутреннего сопротивления накопителя. Другим подходом, основанным на описании электрохимических процессов, происходящих внутри батареи, является использование системы уравнений в частных производных и многочастичного фильтра, что позволяет производить одновременную оценку состояния заряда и внутреннего сопротивления [40]. Общим недостатком рассмотренных выше методов является сложность математических моделей, что делает невозможным их использование во встраиваемых системах.

К алгоритмам реального времени также относят и подходы, в основе которых лежит рассмотрение динамики батареи с использованием метода эквивалентной цепи. Модификации фильтра Калмана и метода наименьших квадратов являются наиболее часто встречающимися подходами, позволяющими оценить внутреннее сопротивление, используя модели, построенные на основе эквивалентной цепи.

Dual Extended Kalman Filter (DEKF) и Dual Sigma-Point Kalman Filter (DSPKF) используются в системах управления батареями для осуществления оценки как состояния заряда, так и внутреннего сопротивления аккумулятора. Основная идея таких методов заключается в рассмотрении двух параллельных фильтров, один из которых используется для оценки состояния заряда, второй – для оценки внутреннего сопротивления. В силу рекурсивного характера таких алгоритмов значительно снижаются требования к минимальному объему памяти, необходимому для работы системы, что делает возможной их реализацию на различных программно-аппаратных платформах.

Методы наименьших квадратов, рассмотренные в [23], были использованы для оценки внутреннего сопротивления в режиме реального вре-

мени. Данные алгоритмы требуют меньшего количества вычислительных мощностей по сравнению с подходами, в основе которых лежит фильтр Калмана. Однако методы наименьших квадратов не являются устойчивыми к шумам.

1 Электрохимическая модель ячейки

Математическое прототипирование электрохимических процессов, возникающих внутри аккумулятора, требует понимания причинно-следственных связей, приводящих к возникновению соответствующих реакций внутри батареи. В данной главе рассмотрим основные понятия, определения, электрохимические реакции, происходящие внутри литий-ионных накопителей.

1.1 Основные понятия и определения

В соответствии со стандартом безопасной установки электрооборудования National Electrical Code (NFPA-70) [28] под *ячейкой* понимается наименьшая электрохимическая составляющая батареи, которая характеризуется наличием анода (отрицательный электрод) и катода (положительный электрод), а также способностью получать, хранить и доставлять электрическую энергию. В свою очередь, *батарея* представляет собой группу ячеек (см. Рис. 3).

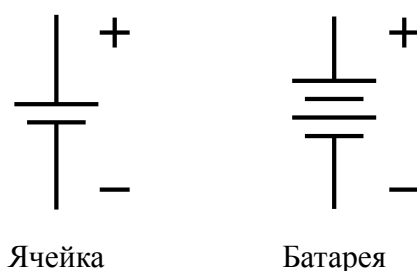


Рис. 3: Схематические изображения ячейки и батареи

Номинальное напряжение ячейки – это напряжение, присвоенное ячейке производителем и характеризующее величину напряжения, на которое рассчитана ячейка в условиях нормальной работы, при этом *рабочее напряжение* может быть как больше, так и меньше этого значения. Рабочее напряжение отдельной ячейки зависит от множества факторов, которые будут рассмотрены позднее. Например, номинальное напряе-

ние свинцово-кислотных (PbA) ячеек составляет 2.1 В, никель-кадмиевых (NiCd) – 1.35 В, никель-металл-гидридных (NiMH) – 1.2 В.

Ячейки способны доставлять электрический заряд для питания цепи с нагрузкой. *Номинальная емкость заряда* – это количество заряда, которое ячейка способна содержать в себе. Отметим, что в международной системе величин СИ единицей измерения электрического заряда служат Кулоны (К). Емкость ячейки, равная 1 Ампер-часу (Ач), эквивалентна 3600 К.

Под *кулоновской скоростью* в дальнейшем будем понимать константную величину, отражающую способность ячейки выдерживать заряд или разряд в течение 1 часа. Например, полностью заряженная ячейка емкостью 20 Ач, способна обеспечить ток величиной 20 А в течение 1 часа или ток величиной 2 А в течение 10 часов, до момента полной разрядки ячейки. Отметим, что зависимость между кулоновской скоростью и временем разряда ячейки не всегда линейна (в силу внутренних электрохимических процессов ячейки).

Также ячейка способна накапливать *энергию* в электрохимической форме. *Номинальная энергоемкость* ячейки – это количество энергии, представимое в Ватт-часах (Втч), вычисляемое как номинальное напряжение, помноженное на номинальную емкость. Отметим, что энергия и мощность – это различные понятия. *Мощность* измеряется в Ваттах (Вт). Максимальная мощность, которую может предоставить ячейка, ограничена внутренним сопротивлением и не проста в определении. Однако мощностью ячейки можно управлять, введя минимальные и максимальные пределы напряжения на клеммах ячейки.

Далее рассмотрим *параллельное* и *последовательное* соединения ячеек. При *последовательном* соединении ячеек напряжение батареи вычисляется как сумма напряжений каждой отдельной ячейки (второй закон Кирхгофа). Однако в соответствии с первым закон Кирхгофа, емкость заряда

батареи при таком соединении ячеек – это емкость одной отдельно взятой ячейки. Например, Рис. 4 (а), рассмотрим три последовательно соединенные ячейки напряжением 2 В и емкостью 20 Ач каждая, тогда напряжение всей батареи будет равно 6 В, емкость – 20 Ач, энергоемкость – 120 Втч. При *параллельном* соединении ячеек, напряжение батареи – напряжение отдельно взятой ячейки (второй закон Кирхгофа), а емкость батареи вычисляется как сумма емкостей всех ячеек (первый закон Кирхгофа). Например, Рис. 4 (б), рассмотрим пять ячеек, соединенных в параллель. Напряжение одной ячейки равняется 2 В, а емкость каждой, как и в предыдущем случае, – 20 Ач. Таким образом, напряжение такой батареи будет равно 2 В, емкость – 100 Ач, энергоемкость – 200 Втч.

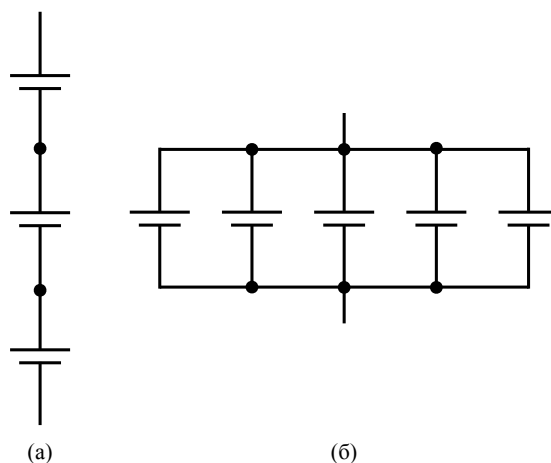


Рис. 4: Последовательное (а) и параллельное (б) соединения ячеек

1.2 Работа ячеек на электрохимическом уровне

Каждая ячейка должна включать в себя отрицательные электроды, положительные электроды, электролит и сепаратор. Также, большинство ячеек имеют токоприемник. На Рис. 5 изображено схематическое представление литий-ионной ячейки [42].

Как правило, отрицательный электрод ячейки представлен в виде чистого металла, сплава или водорода. В процессе разряда отрицатель-

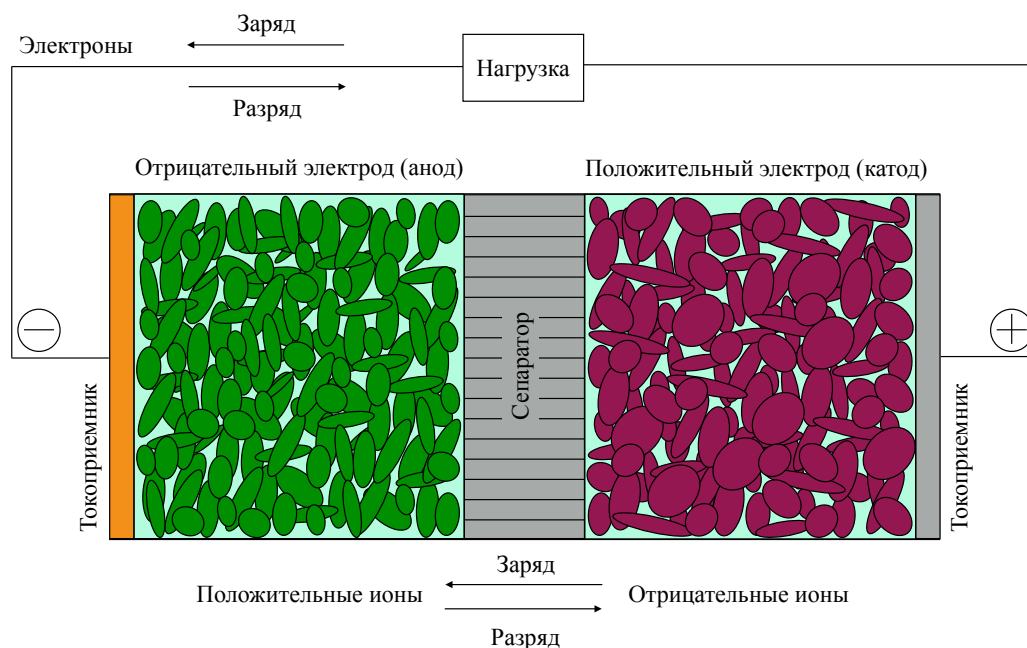


Рис. 5: Схематическое представление литий-ионной ячейки

ный электрод передает электроны во внешнюю цепь, происходит окисление. Окисление отдельных молекул электродов влечет потерю электронов, атомы электрода становятся более положительно заряженными. В процессе заряда отрицательный электрод принимает электроны извне (из внешней цепи) и атомы электрода восстанавливаются. Таким образом, электрохимические процессы, протекающие внутри ячеек, называются *окислительно-восстановительными* реакциями.

Под *анодом* будем понимать электрод, на котором происходит реакция окисления. Так, мы можем называть отрицательные электроды анодом в случае разряда ячейки и катодом — при заряде. Положительными электродами ячейки являются оксид металла, сульфид, кислород. Например, положительным электродом свинцово-кислотной ячейки является чистый диоксид свинца. Далее под *катодом* будем понимать электрод, на котором происходит реакция восстановления. Таким образом, положительный электрод является катодом при разряде ячейки и анодом — при заряде.

Электролит — это ионный проводник, обеспечивающий среду для внутреннего переноса заряда между электродами. Электролит должен быть

электрическим изолятором (он не может проводить электроны), если это требование не будет выполнено, то ячейка может быть подвергнута саморазряду или короткому замыканию. Часто электролит содержит внутри себя жидкий *растворитель*, который и обеспечивает ионную проводимость. В процессе разряда ячейки, положительно заряженные ионы (катионы) движутся через электролит к положительному электроду, в то время как отрицательно заряженные ионы (анионы) движутся через электролит к отрицательному электроду. В процессе заряда ячейки, происходит противоположно направленный процесс: катионы движутся к отрицательному электроду, анионы – к положительному.

Сепаратор разделяет положительные и отрицательные электроды. Он является ионным проводником, но электронным изолятором. Основной его функцией является предотвращение внутреннего короткого замыкания, которое может возникнуть между двумя электродами, что приведет ячейку к саморазряду.

Токоприемник является электронным проводником, с которым взаимодействуют электродные материалы. Токоприемники не принимают участия в химических реакциях ячейки, но помогают уменьшить сопротивление электрода.

1.3 Литий-ионные ячейки

Основное внимание в данной работе будет уделено *литий-ионным* ячейкам. Рассмотрим основные электрохимические процессы, происходящие внутри них. На Рис. 6 отрицательные и положительные электроды представлены в виде кристаллических структур. Литий, изображенный в виде сфер, может быть добавлен или удален из пространств, образованных этими электродами. Литий накапливается внутри электродов в качестве независимых друг от друга нейтральных атомов (атомов, не несущих заряда). Каждый

валентный электрон атома лития может перейти к соседним атомам, находящимся в кристаллической структуре. Таким образом, литий может достаточно свободно перемещаться внутри ячейки. Также литий может как прибывать на поверхность электрода, так и покидать ее, и рассеиваться внутри кристаллической структуры, тем самым, обеспечивая его равномерную концентрацию.

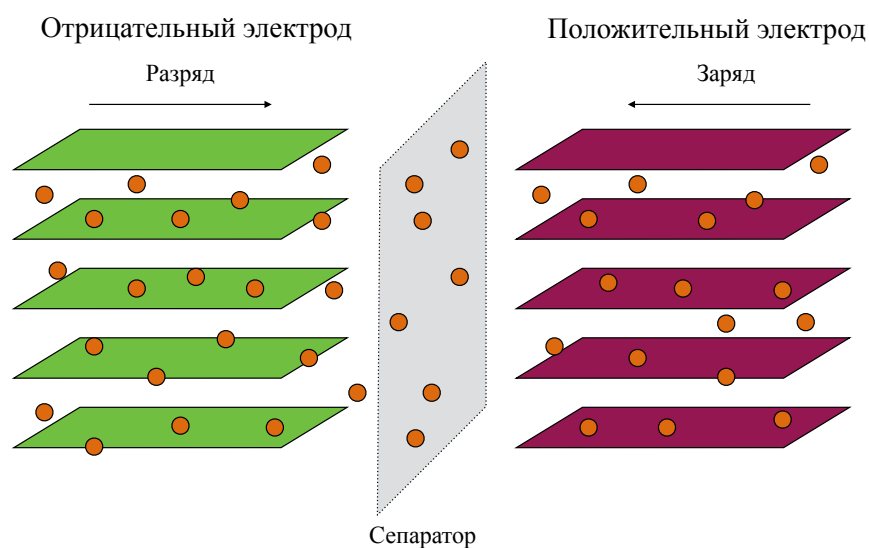


Рис. 6: Схематическое представление электрохимического процесса, происходящего внутри литий-ионной ячейки

Рассмотрим преимущества, выделяющие литий-ионные ячейки среди прочих разновидностей химий аккумуляторов:

- Использование литий-ионных ячеек возможно при достаточно высоких значения напряжения, как правило, среднее значение равняется 3.7 В, в то время как для никель-металл-гидридных ячеек это значение не превосходит 1.2 В. Поэтому литий-ионные аккумуляторы имеют высокую энергетическую эффективность;
- Высокие значения напряжения позволяют использовать меньшее количество ячеек, не теряя величины мощности;
- Литий-ионные ячейки имеют очень маленькую скорость саморазряда. Например, никель-металл-гидридные ячейки могут терять от 1 до

5 % своего заряда в течение дня, даже если они не используются в качестве источника питания. В то время как литий-ионные аккумуляторы могут служить источником питания даже спустя месяцы, не теряя количества заряда.

К недостаткам литий-ионных ячеек можно отнести:

- Литий-ионная ячейка такой же емкости как и никель-металл-гидридная стоит дороже (возможно, это будет не так, если увеличатся масштабы производства литий-ионных аккумуляторов);
- Литий-ионные ячейки крайне чувствительны к перезаряду, поэтому, они содержат внутри себя специальное устройство, прекращающее работу ячейки при значениях напряжения, превышающих допустимое максимальное, что приводит к увеличению стоимости их производства;
- Литий-ионные ячейки не производят в привычных для бытового использования размерах (AA, C, D) в связи с экономической нецелесообразностью.

1.4 Механизмы старения ячеек

Жизнеспособность ячеек значительно ухудшается с течением времени в связи с нежелательными, с точки зрения пользователя, химическими и физическими процессами внутри них [47]. Совокупность таких процессов в дальнейшем будем называть *старением*. Отметим, что старение ячейки – это необратимый процесс.

Рассмотрим далее основные причины старения. *Коррозия* возникает в результате взаимодействия ячейки с окружающей средой. Это всеобъемлющее понятие, которое используется для следующих нежелательных

явлений: взаимодействие электролита с токоприемниками (конденсат, дождевая вода и т.д.) или растворителя с электродом. Если в воде растворены ионы солей, кислот, или т. п., ее электропроводность повышается, а скорость процесса увеличивается.

Жизнеспособность ячеек ухудшается за счет *образования кристаллов* внутри них: литий, исчезающий с поверхности электрода в процессе разряда, не возвращается на свое место в процессе последующего заряда ячейки, на освободившихся местах образуются кристаллы, которые нарастают с течением времени. Данный процесс уменьшает поверхность электрода, тем самым увеличивая внутреннее сопротивление ячейки и уменьшая ее способность поставлять высокую мощность.

Вышеперечисленные причины старения ячеек могут привести к следующим нежелательным явлениям:

- Увеличение внутреннего сопротивления;
- Уменьшение внутренней емкости ячейки;
- Увеличение скорости саморазряда ячейки.

Отметим также, что скорость старения ячеек значительно увеличивается при высоких температурах. Оптимальной температурой для хранения ячеек, как правило, является комнатная температура.

Введенные в текущей главе понятия и определения будут активно использоваться в последующих главах при построении математических моделей ячеек и описании их работы.

2 Метод эквивалентной цепи

В данной главе мы рассмотрим метод, позволяющий описать электрохимические процессы, происходящие внутри литий-ионных ячеек с использованием State-Space (SS) моделей. Данный подход будем называть *методом эквивалентной цепи*. Отметим, что все вводимые в данной главе определения, такие как источник напряжения, резистор, конденсатор – это абстрактные понятия, которые необходимы для моделирования физических процессов внутри ячейки и используются для упрощения описания.

Далее под *ошибкой модели* будем понимать разницу между предсказаниями, выполненными с использованием вводимой математической модели, и наблюдением за реальной системой. Проводить анализ рассматриваемой ошибки будем после реализации каждого метода, характеризующего внутренние электрохимические процессы литий-ионных ячеек, с целью подбора наилучшей модели системы. Очевидно, наша цель – минимизировать ошибку модели.

2.1 Напряжение разомкнутой цепи

В качестве основной наблюдаемой характеристики системы выберем напряжение на клеммах, то есть напряжение, которое ячейка способна предоставить потребителю [14].

Рассмотрим простейшую идеальную модель ячейки (см. Рис. 7) [32]. В данной модели предполагается, что напряжение $v(t)$ не зависит от тока $i(t)$ и от предыдущих состояний ячейки. Отсюда следует, что $v(t)$ – это постоянная функция. Напряжение, при котором ячейка не используется потребителем, то есть находится в состоянии равновесия, будем называть *напряжением разомкнутой цепи* – Open Circuit Voltage (OCV), Рис. 7.

2.2 Состояние заряда

Отметим, что напряжение полностью заряженной ячейки превосходит напряжение полностью разряженной ячейки. То же относится и к OCV . Таким образом, мы можем улучшить модель, учитывая взаимосвязь между OCV и состоянием заряда внутри ячейки.

Под *состоянием заряда* (z) ячейки будем понимать величину, принимающую значения от 0 до 1, где 0 (или 0%) соответствует полностью разряженному состоянию ячейки, а 1 (или 100%) – полностью заряженному [14].

Полная емкость ячейки (Q) – это количество заряда, удаляемое из ячейки в процессе ее разряда от 100% до 0%. Будем считать, что полная емкость ячейки не зависит от температуры или тока, и не изменяется быстро с течением времени в процессе старения ячейки. Поэтому, емкость отнесем к основным параметрам (характеристикам) ячейки, а не ее состояниям.

Процесс изменения состояния заряда ячейки можно описать, используя обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{z}(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -\frac{\eta(t) \cdot i(t)}{Q}, \quad (2)$$

где $\eta(t)$ – *выход по току*, величина, равная отношению количества теоретически необходимого к фактически выпущенному заряду. Отметим, что $i(t)$ принимает положительные значения при разряде. Из уравнения (2) следует, что состояние заряда внутри ячейки уменьшается при положительных значениях тока (разряд) и увеличивается при отрицательных (заряд). Так как сила тока измеряется в амперах, то, для сохранения размерности рассматриваемых величин, величина измерения емкости должна быть переведена в ампер-секунды. Примем $\eta(t) = 1$ в случае разряда и $\eta(t) \leq 1$ в случае заряда. Вычисление величины выхода по току – трудная задача, зависящая от скорости заряда и состояния заряда, температуры и внутренних электрохимических процессов ячейки. Однако принятие $\eta(t) = 1$

дает приемлемые результаты при моделировании рассматриваемых нами литий-ионных ячеек.

Проинтегрируем уравнение (2) на интервале от t_0 до t

$$z(t) = z(t_0) - \frac{1}{Q} \int_{t_0}^t \eta(\tau) i(\tau) d\tau. \quad (3)$$

Уравнение (3) позволяет рассчитать состояние заряда в произвольный момент времени t , при условии, что известно состояние заряда в начальный момент времени $z(t_0)$.

Преобразуем уравнение (3) к дискретной форме, введя следующие обозначения $t_0 = k\Delta t$ и $t = (k+1)\Delta t$, где Δt – некоторый заранее заданный период измерения величины z . Таким образом, уравнение (3) принимает вид

$$z((k+1)\Delta t) = z(k\Delta t) - \frac{\Delta t}{Q} \eta(k\Delta t) i(k\Delta t). \quad (4)$$

Для упрощения записи перепишем уравнение (4) в следующем виде:

$$z[k+1] = z[k] - \frac{\Delta t}{Q} \eta[k] i[k], \quad (5)$$

где запись $z[k]$ эквивалента записи $z(k\Delta t)$.

Улучшенная модель ячейки представлена на Рис. 8. Идеальный источник напряжения теперь заменен на зависимость вида $OCV(z(t))$. Если помимо этого требуется ввести зависимость от температуры, то рассматривают источник вида $OCV(z(t), T(t))$, где $T(t)$ – внутренняя температура ячейки в момент времени t .

Напряжение разомкнутой цепи определяют эмпирически для различных значений состояния заряда в результате нескольких экспериментов, проводимых при комнатной температуре ($25^\circ C$). Затем полученные величины записывают в интерполяционную сетку, с помощью которой определяют $OCV(z(t))$ в произвольной точке $z(t)$.

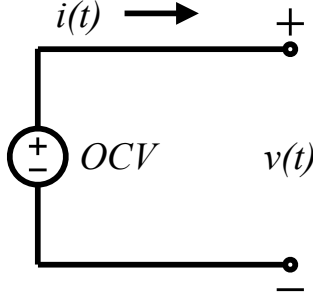


Рис. 7: Простейшая модель ячейки: напряжение постоянно

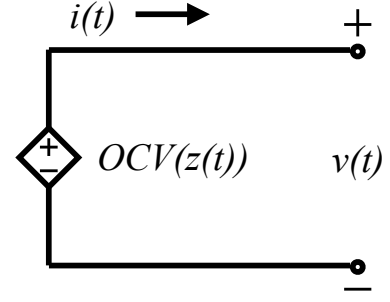


Рис. 8: Улучшенная модель ячейки: напряжение зависит от состояния заряда

2.3 Эквивалентное последовательное сопротивление

До этого нами была рассмотрена статическая модель поведения литий-ионной ячейки. Введем дополнительные характеристики в модель, позволяющие описать динамическое поведение аккумулятора, то есть процессы внутри ячейки при воздействии на нее переменного тока.

Первое наблюдение, которое нам необходимо учесть в рассматриваемой модели, – это падение напряжения на клеммах ячейки ниже напряжения разомкнутой цепи в случае, если ячейка подключена к нагрузке (разряд), и выше напряжения разомкнутой цепи, если ячейка заряжается. Данное поведение может быть описано посредством добавления в модель *эквивалентного последовательного сопротивления*. Для этого добавим к (2) дополнительное уравнение, характеризующее напряжение на клеммах (см. Рис. 9),

$$\dot{z}(t) = -\frac{\eta(t) \cdot i(t)}{Q}$$

$$v(t) = OCV(z(t)) - i(t)R_0.$$

Таким образом, мы получили модель ячейки, для которой $v(t) > OCV(z(t))$, если $i(t) < 0$, то есть в случае заряда, и $v(t) < OCV(z(t))$, если $i(t) > 0$, – в случае разряда.

Преобразуем получившиеся уравнения к дискретной форме, используя тот же порядок действий, что и при выводе уравнения (5)

$$\begin{aligned}
z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q} \eta[k] i[k] \\
v[k] &= OCV(z[k]) - i[k] R_0.
\end{aligned} \tag{6}$$

2.4 Диффузионное напряжение

Поляризация – это внутренний процесс ячейки, характеризующий отклонение напряжения на клеммах от напряжения разомкнутой цепи [14]. В рассматриваемых моделях эквивалентной цепи мгновенные значения поляризации учитываются в уравнении наблюдения (слагаемое $i(t) \cdot R_0$). Однако в реальной жизни процесс поляризации внутри ячеек имеет более сложное поведение, он медленно развивается в те моменты времени, когда происходит потребление тока из ячейки, и медленно угасает, когда ячейка находится в состоянии покоя.

Рассмотренная модель ячейки позволяет описать ее внутренние процессы только в состоянии покоя. Данная модель характеризует падение напряжения в моменты потребления тока и восстановление напряжения в моменты отсутствия нагрузки на ячейку. Однако, как известно, напряжение постоянно изменяется с течением времени, как в процессе заряда, так и разряда, и при этом состояние заряда не изменяется в то время, когда величина тока равна нулю. Отсюда возникает потребность в расширении рассматриваемой модели для учета описанных выше процессов.

Дополним рассмотренную ранее модель, введя в нее дополнительно одну RC-цепочку (см. Рис. 10). Таким образом, SS-модель ячейки примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= -\frac{\eta(t) \cdot i(t)}{Q} \\
v(t) &= OCV(z(t)) - v_{c_1}(t) - v_{R_0}(t),
\end{aligned}$$

где уравнение состояния не изменилось, но в уравнении наблюдения появи-

лось дополнительное слагаемое $v_{c_1}(t)$, позволяющее описать непрерывное изменение напряжения.

Преобразуем получившуюся систему к дискретной форме

$$\begin{aligned} z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q} \eta[k] i[k] \\ v[k] &= OCV(z[k]) - v_{C_1}[k] - v_{R_0}[k], \end{aligned}$$

раскроем слагаемые $v_{C_1}[k]$, $v_{R_0}[k]$ для упрощения применения модели к реальным данным

$$\begin{aligned} z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q} \eta[k] i[k] \\ v[k] &= OCV(z[k]) - R_1 i_{R_1}[k] - R_0 i[k]. \end{aligned}$$

Выведем формулу для вычисления точного значения тока i_{R_1} . Сумма токов, протекающих через резистор R_1 и конденсатор C_1 , равняется $i(t)$. Также известно, что ток на конденсаторе $i_{C_1}(t) = C_1 \dot{v}_{C_1}(t)$, откуда следует, что

$$i_{R_1}(t) + C_1 \dot{v}_{C_1}(t) = i(t).$$

Напряжение на конденсаторе $v_{C_1}(t) = R_1 i_{R_1}(t)$, отсюда

$$\begin{aligned} i_{R_1}(t) + R_1 C_1 \frac{di_{R_1}(t)}{dt} &= i(t) \\ \frac{di_{R_1}(t)}{dt} &= -\frac{1}{R_1 C_1} i_{R_1}(t) + \frac{1}{R_1 C_1} i(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, полученное дифференциальное уравнение может быть использовано для расчета значений $i_{R_1}(t)$.

Так как все проводимые расчеты требуют перехода от непрерывной формы дифференциального уравнения к дискретной, выведем алгоритм преобразования в общем случае, а затем применим его к уравнению (7).

Рассмотрим непрерывную SS-систему вида

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t). \quad (8)$$

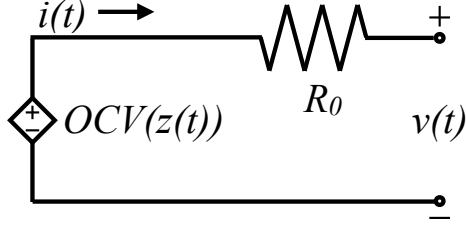


Рис. 9: Улучшенная модель ячейки: добавление в модель эквивалентного последовательного сопротивления

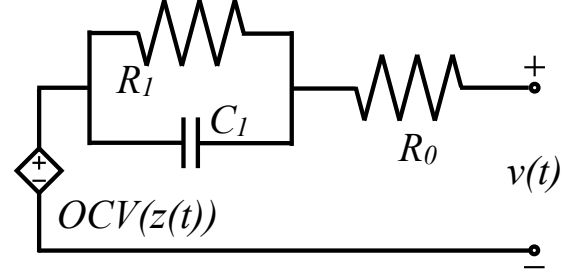


Рис. 10: Улучшенная модель ячейки: добавление в модель диффузионного напряжения

Задача состоит в нахождении значений $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$: $x[k] = x(k\Delta t)$. Будем предполагать, что входной сигнал $u(t)$ является постоянной во времени функцией.

Рассмотрим общее решение уравнения (8) [2]

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Преобразуем его к дискретной форме

$$\begin{aligned} x[k+1] &= x((k+1)\Delta t) \\ &= e^{a(k+1)\Delta t}x(0) + \int_0^{(k+1)\Delta t} e^{a(k+1)\Delta t-\tau}bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Разобьем получившийся интеграл на два

$$\begin{aligned} x[k+1] &= e^{a(k+1)\Delta t}x(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Вынесем общий множитель $e^{a\Delta t}$ из первых двух слагаемых

$$\begin{aligned} x[k+1] &= e^{a\Delta t}e^{ak\Delta t}x(0) + e^{a\Delta t} \int_0^{k\Delta t} e^{a(k\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)}bu(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{a\Delta t} \left(e^{ak\Delta t} x(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{a(k\Delta t-\tau)} bu(\tau) d\tau \right) \\
&\quad + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\
&= e^{a\Delta t} x(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{a((k+1)\Delta t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\
&= e^{a\Delta t} x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Так как нами было сделано предположение, что $u(t)$ – постоянная функция на всем временном промежутке t , то она остается постоянной на интервале от $k\Delta t$ до $(k+1)\Delta t$ и принимает значения $u(k\Delta t)$:

$$\begin{aligned}
x[k+1] &= e^{a\Delta t} x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} \left(\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-a\tau} d\tau \right) bu[k] \\
&= e^{a\Delta t} x[k] + e^{a(k+1)\Delta t} \left(-\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \right) bu[k] \\
&= e^{a\Delta t} x[k] + \frac{1}{a} e^{a(k+1)\Delta t} \left(e^{-ak\Delta t} - e^{-a(k+1)\Delta t} \right) bu[k] \\
&= e^{a\Delta t} x[k] + \frac{1}{a} (e^{a\Delta t} - 1) bu[k].
\end{aligned}$$

Полученное выражение – это дискретный аналог непрерывного дифференциального уравнения вида (8).

Применим полученный результат к уравнению (7). Для этого установим соответствия между константами и сигналами в уравнениях (7), (8)

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{R_1 C_1}, & b &= \frac{1}{R_1 C_1} \\
x[k] &= i_{R_1}[k], & u[k] &= i[k].
\end{aligned}$$

Подставим данные значения в дискретный аналог уравнения (8)

$$\begin{aligned}
i_{R_1}[k+1] &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1}\right) i_{R_1}[k] \\
&\quad - R_1 C_1 \left(\exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1}\right) - 1 \right) \frac{1}{R_1 C_1} i[k] \\
&= \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1}\right) i_{R_1}[k] + \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1 C_1}\right) \right) i[k].
\end{aligned}$$

Подводя итог, непрерывная SS-модель ячейки, описывающая цепь, изображенную на Рис. 10, имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= -\frac{\eta(t)i(t)}{Q} \\ \frac{di_{R_1}(t)}{dt} &= -\frac{1}{R_1C_1}i_{R_1}(t) + \frac{1}{R_1C_1}i(t) \\ v(t) &= OCV(z(t)) - R_1i_{R_1}(t) - R_0i(t),\end{aligned}$$

ее дискретный аналог

$$\begin{aligned}z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q}\eta[k]i[k] \\ i_{R_1}[k+1] &= \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1C_1}\right)i_{R_1}[k] + \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_1C_1}\right)\right)i[k] \\ v[k] &= OCV(z[k]) - R_1i_{R_1}[k] - R_0i[k]\end{aligned}$$

Количество слагаемых в модели, описывающих RC-цепочки, варьируется в зависимости от химии аккумулятора и определяется эмпирически на основе теоретического спектра импеданса [39]. Таким образом, получаем общий вид дискретной SS-модели батареи

$$\begin{aligned}z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q}\eta[k]i[k] \\ i_{R_1}[k+1] &= \sum_j \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_jC_j}\right)i_{R_j}[k] + \sum_j \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_jC_j}\right)\right)i[k] \quad (9) \\ v[k] &= OCV(z[k]) - \sum_j R_ji_{R_j}[k] - R_0i[k].\end{aligned}$$

Отметим, что полученная SS-модель ячейки может быть уточнена, если дополнительно учесть зависимость состояний, протекающих на резисторах и конденсаторах, от состояния заряда $z(t)$ и температуры $T(t)$.

Рассмотренная в данной главе SS-модель ячейки является основой алгоритмов мониторинга, проектирования и управления литий-ионными аккумуляторами. В следующих главах при выводе методов будем пользоваться введенной моделью.

3 Состояние «здоровья» ячейки

С течением времени ячейки, находящиеся внутри аккумуляторной батареи, необратимо стареют, что сказывается на их неспособности соответствовать требованиям, предъявляемым к их производительности (ячейка достигает «конца жизни») [24]. Важно уметь определять ее текущий статус деградации, главным образом для того, чтобы иметь возможность рассчитывать с высокой точностью уровень состояния заряда, имеющиеся энергию и мощность. В данной главе будут рассмотрены основные механизмы деградации ячеек и характеристики, на основе которых можно оценить текущее состояние «здоровья». Однако до сих пор открытым вопросом остается оценка состояния «здоровья» ячейки, изначально имеющей дефекты конструкции (некачественные и нечистые материалы, плохо контролируемое производство и т.д.), такие ячейки, как правило, функционируют нормально в течение некоторого промежутка времени, а затем дают сбой. Также отметим, что не только правила эксплуатации влияют на текущий уровень состояния «здоровья» ячейки, но и внешние факторы, такие как температура окружающей среды и физический урон.

В данной главе основное внимание будет уделено двум главным характеристикам состояния «здоровья» ячейки: емкости и сопротивлению, так как они могут быть использованы для оценки имеющихся энергии и мощности соответственно.

3.1 Емкость

Емкость ячейки Q уменьшается в процессе ее деградации. В литий-ионных аккумуляторах причиной уменьшения емкости служат нежелательные побочные реакции, потребляющие ионы лития, и структурный износ электродных материалов [47].

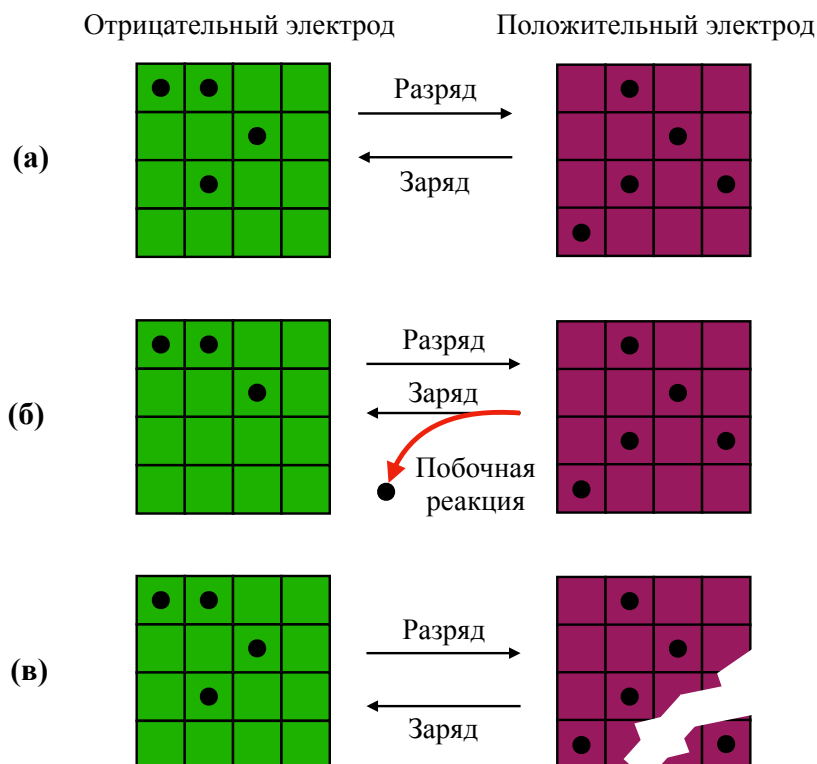


Рис. 11: (а) Функционирование ячейки в идеальном случае (б) Потеря емкости в случае побочных реакций (в) Потеря емкости в случае структурного износа материалов

На Рис. 11 (а) изображена упрощенная схема функционирования ячейки в идеальном случае, то есть в отсутствии старения. Положительный и отрицательный электроды имеют 16 участков, которые способны удерживать атомы лития. На рисунке атомами лития заняты четыре участка отрицательного электрода и пять – положительного. Когда ячейка полностью заряжена, все девять атомов лития будут занимать девять участков отрицательного электрода, а все участки положительного электрода будут пусты. Противоположная ситуация происходит в случае полностью разряженной ячейки: пустыми остаются все участки на стороне отрицательного электрода, а атомы лития занимают участки положительного электрода. Таким образом, номинальная емкость ячейки может быть вычислена как минимальное из чисел: количество пригодных участков для хранения атомов лития на стороне отрицательного электрода, количество пригодных участков для хранения атомов лития на стороне положительного электро-

да и количество атомов лития, принимающих участие в реакции. Например, на Рис. 11 (а) номинальная емкость равняется минимальному из чисел 16, 16 и 9, то есть, девяти атомам лития.

Рассмотрим факторы, влияющие на уменьшение емкости ячейки. К таковым можно отнести различные нежелательные побочные реакции, потребляющие атомы лития в процессе их перехода от одного электрода к другому. Стоит отметить, что большинство побочных реакций происходит в случае заряда ячейки. Например, на Рис. 11 (б) побочная реакция потребила один атом лития, тем самым уменьшив емкость ячейки до восьми атомов лития.

Также к факторам, оказывающим негативное влияние на емкость ячейки, следует отнести повреждение кристаллической структуры самого электрода. Так, на Рис. 11 (в) данное явление изображено в виде белого «рубца» на стороне положительного электрода. Атомы лития, попавшие в «отколотую» часть электрода, более не могут принимать участия во внутренних процессах ячейки. Вместе с тем, атомы лития не имеют возможности занимать поврежденные участки кристаллической структуры, поэтому, на Рис. 11 (в) количество пригодных участков для хранения атомов лития на стороне положительного электрода равняется девяти. Таким образом, емкость ячейки в данном случае вычисляется как минимальное из чисел 16, 9 и 8, то есть, емкость ячейки равняется восьми атомам лития.

Процессы старения ячейки, рассмотренные выше, – это медленные реакции, происходящие внутри ячейки, и оказывающие непосредственное влияние на количество энергии, предоставляемое ячейкой, в связи с этим их часто называют *пропускной способностью*.

3.2 Эквивалентное последовательное сопротивление

В процессе старения ячейки ее эквивалентное последовательное сопротивление R_0 постоянно увеличивается, что вызвано, как и в случае уменьшения емкости, нежелательными побочными реакциями и ухудшением структуры материалов [24]. Побочные реакции образуют резистивные пленки на поверхности активных материалов, препятствующие проникновению атомов лития. Нарушение структуры материалов приводит к уменьшению электронной проводимости.

Знание точного значения эквивалентного последовательного сопротивления каждой ячейки предоставляет пользователю информацию об имеющейся мощности, но не энергии.

В данной главе были рассмотрены два основных параметра ячейки, составляющие фундаментального понятия, – состояние «здоровья». Также, были изучены причины, способствующие ухудшению данного состояния. Информация, приведенная в данной главе, будет использована в дальнейшем при анализе результатов алгоритмов мониторинга: возрастающие значения внутреннего сопротивления и уменьшение текущей емкости должны трактоваться как ухудшение состояния «здоровья» ячейки.

4 Фильтр Калмана

Фильтр Калмана – рекурсивный алгоритм, используемый для оценки вектора состояния линейной системы [22]. Если система является нелинейной, ее можно линеаризовать в каждый конкретный момент времени, используя предположение о явной зависимости выходных характеристик системы от времени, поскольку реакция системы на один и тот же входной сигнал изменяется с течением времени. Далее в работе будет продемонстрировано применение фильтра Калмана для оценки состояния заряда и состояния «здоровья» батареи.

4.1 Оценка состояния системы

На Рис. 12 представлена схема оценки состояния системы с использованием математической модели батареи в пространстве состояний [4]. Верхняя ветвь схемы отображает истинное поведение батареи (*реальная система*). На вход системе подается электрический ток. Выходным сигналом служит напряжение. Каждая реальная система (батарея) содержит внутри себя сведения о ее истинных значениях состояния заряда и диффузионного напряжения (*состояние*). Однако все перечисленные величины не могут быть измерены напрямую с использованием каких-либо приборов, поэтому в дальнейшем мы рассмотрим некоторые способы их оценки. Более того, задачу осложняет наличие шумов во входном (*шум процесса*) и выходном (*шум датчиков*) сигналах.

Нижняя часть схемы (см. Рис. 12) – математическая модель (*модель системы*), используемая для оценки состояния батареи (*оценка состояния*). Отметим, что на вход реальной и смоделированной системы подается один и тот же измеряемый сигнал. Таким образом, данный подход позволяет получить оценку не только вектора состояния системы, но и выходного сигнала. Это будет использовано в дальнейшем в качестве механизма

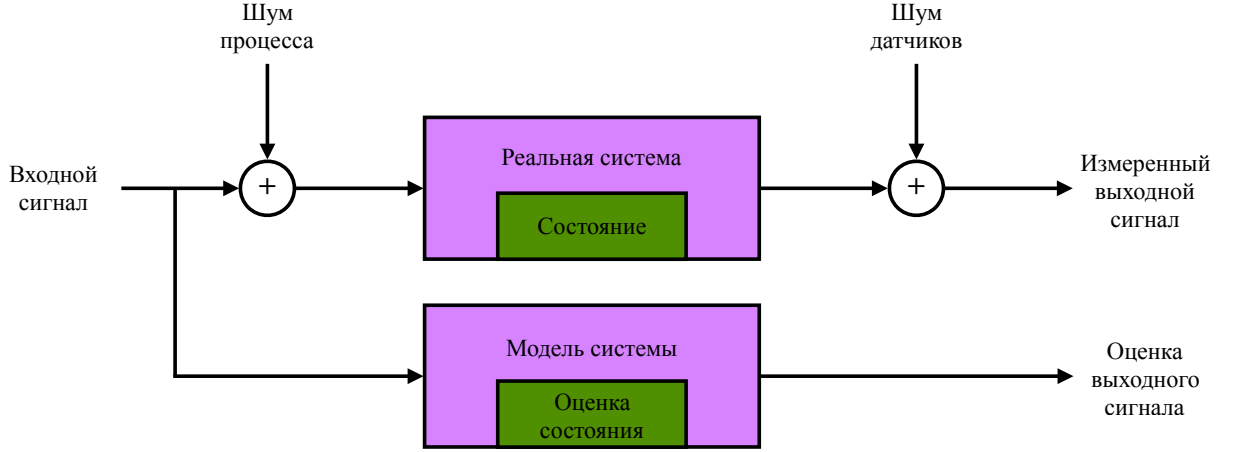


Рис. 12: Схематическое представление оценки состояния модели батареи в пространстве состояний

обратной связи для получения более точной оценки вектора состояния системы по сравнению с прочими методами оценки состояния батареи.

4.2 Последовательно-вероятностный подход

Рассмотрим общую нелинейную модель системы в пространстве состояний, оценку состояния которой мы хотим получить

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}), \quad (10)$$

$$y_k = h(k_k, u_k, v_k), \quad (11)$$

где x_k — вектор состояния модели, y_k — измеренные значения напряжения, u_k — известный входной сигнал, w_k — неизвестный случайный шум процесса, v_k — неизвестный случайный шум датчиков. При рассмотрении модели батареи будем принимать $u_k = i_{meas,k}$, где $i_{meas,k}$ — измеренные значения тока.

Последовательно-вероятностный подход (ПВП) (Рис. 13) позволяет получить эффективную рекурсивную оценку текущего состояния динамической системы x_k , используя измерения, полученные со всех входов и выходов до момента времени k . Множества, состоящие из всех измеренных значений входа и выхода, будем обозначать \mathbb{U}_k и \mathbb{Y}_k соответственно:

$$\mathbb{U}_k = \{u_0, u_1, \dots, u_k\}, \quad (12)$$

$$\mathbb{Y}_k = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}. \quad (13)$$

Таким образом, решение будет вычисляться *последовательно* в том смысле, что оно базируется на рекурсивном подходе: оценка состояния на текущем шаге получается на основе оценки, сделанной на предыдущем шаге, и измерений, произведенных в текущий момент времени k . Решение носит *вероятностный* характер, так как учитывает в себе случайные шум процесса и шум датчиков.

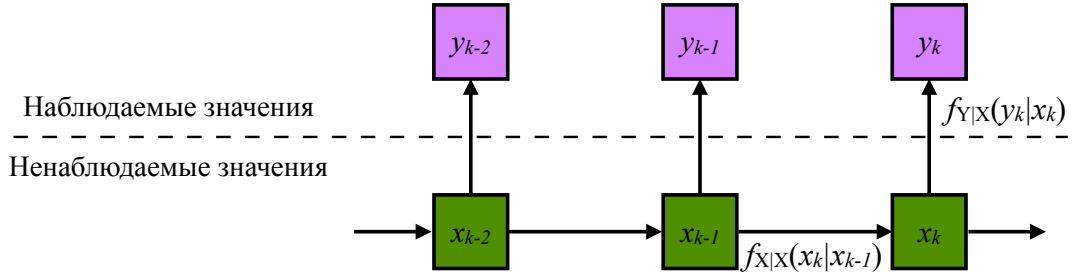


Рис. 13: Последовательно-вероятностный подход

Состояние рассматриваемой системы изменяется во времени. С одной стороны, изменение состояния системы нам известно, так как известен входной сигнал u_k , с другой – изменение вектора состояния может быть рассмотрено как случайный процесс из-за наличия шумов процесса w_k . Таким образом, состояние системы в конкретный момент времени – это некоторый *случайный вектор*, а изменение состояния системы во времени может быть рассмотрено как *случайный процесс*. Неточность измерения состояния, обусловленная наличием шума w_k , при переходе из точки x_{k-1} в точку x_k задается *плотностью вероятности* $f_{X|X}(x_k|x_{k-1})$.

Мы не можем измерить состояние системы напрямую, но у нас имеется зашумленный выходной сигнал y_k , который в совокупности с ранее рассмотренным входным сигналом u_k и математической моделью системы, позволяет выполнить оценку состояния системы. Таким образом, исполь-

зуя зашумленные значения сигналов u_k и y_k , мы получаем возможность оценить состояние системы x_k . Плотность вероятности, отражающую распределение шумов в выходном сигнале y_k будем обозначать как $f_{Y|X}(y_k|x_k)$.

При использовании ПВП будем считать, что все шумы, поступающие на вход системы являются гауссовскими, имеющими в каждый момент времени нормальную функцию распределения. Однако данное предположение вносит слишком строгое ограничение на шумы в алгоритм оценки состояния системы. Поэтому будем использовать разложение рассматриваемой системы $G(z)$ в следующем виде: рассмотрим формирующий фильтр $H(z)$, на вход которому поступает белый гауссовский шум. Таким образом, комплексная система $GH(z)$ ведет себя так же как и $G(z)$, входным сигналом которой теперь является преобразованный формирующим фильтром шум, но входным сигналом для $GH(z)$ является белый шум. При использовании ПВП будем использовать комплексную систему $GH(z)$, а не $G(z)$.

Использование данного подхода влечет к расширению модели системы. Пусть на вход исходной системе $G(z)$ поступает негауссовский шум $w_{1,k}$

$$x_{k+1} = Ax_k + B_w w_{1,k}$$

$$y_k = Cx_k.$$

Рассмотрим формирующий фильтр $H(z)$, на вход которому поступает фиктивный белый шум $w_{2,k}$, преобразовываемый фильтром в выходной сигнал $w_{1,k}$:

$$x_{s,k+1} = A_s x_{s,k} + B_s w_{2,k}$$

$$w_{1,k} = C_s x_{s,k}.$$

Таким образом, система $GH(z)$ будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{s,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w C_s \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{s,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_s \end{bmatrix} w_{2,k}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{s,k} \end{bmatrix}$$

4.3 Обозначения

Прежде чем перейти к подробному описанию шагов фильтра Калмана, введем ряд обозначений, которые будут использоваться в дальнейшем.

- Верхний индекс $-$ будем использовать для обозначения *экстраполированных* значений переменных состояния, базирующихся только на предыдущих измерения входного и выходного сигнала.
- Верхний индекс $+$ будем использовать для обозначения *предполагаемых* значений переменных состояния, базирующихся как на предыдущих, так и на текущих измерениях входного и выходного сигнала.
- Переменные с верхним символом $\hat{}$ будут использоваться для обозначения экстраполированных или предполагаемых значений переменных состояния. Например, \hat{x}_k^- обозначает оценку экстраполированного значения состояния системы x_k в момент времени k , а \hat{x}_k^+ – оценка предполагаемого значения состояния системы x_k в момент времени k .
- Переменные с верхним символом $\tilde{}$ будут использоваться для обозначения ошибок между истинным значением состояния системы и предсказанным или предполагаемым значениями. Например, $\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$ и $\tilde{x}_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+$.

- Символом Σ будем обозначать корреляционный момент (ковариационную матрицу) двух величин. Например, $\Sigma_{xy} = \mathbb{E}[xy^T]$, $\Sigma_x = \mathbb{E}[xx^T]$ и $\Sigma_{\tilde{x}\tilde{y}} = \mathbb{E}[\tilde{x}\tilde{y}^T] = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])(y - \mathbb{E}[y])^T]$.

4.4 Минимизация среднеквадратичной ошибки

ПВП позволяет получить оценку состояния системы, которая минимизирует *среднеквадратичную функцию ошибки* между истинным состоянием системы и его оценкой, используя значения входного и выходного сигналов с начального до текущего моментов времени. Таким образом, с учетом формул (12) и (13), в которых рассматриваются значения незашумленного входного сигнала \mathbb{U}_k до момента времени k (наличие шумов во входном сигнале моделируется с использованием случайной величины w_k) и набор зашумленных случайными величинами v_k значений выходного сигнала \mathbb{Y}_k , минимум среднеквадратичной функции ошибки может быть найден как

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^{MMSE} &= \arg \min_{\hat{x}_k^+} (\mathbb{E} [\|x_k - \hat{x}_k^+\|_2^2 \mid \mathbb{Y}_k]) \\ &= \arg \min_{\hat{x}_k^+} \left(\mathbb{E} \left[(x_k - \hat{x}_k^+)^T (x_k - \hat{x}_k^+) \mid \mathbb{Y}_k \right] \right) \\ &= \arg \min_{\hat{x}_k^+} (\mathbb{E} [x_k^T x_k - 2x_k^T \hat{x}_k^+ + (\hat{x}_k^+)^T \hat{x}_k^+ \mid \mathbb{Y}_k]) .\end{aligned}\tag{14}$$

Вычислим производную (14) по \hat{x}_k^+ и приравняем ее к нулю для нахождения минимума среднеквадратичной функции ошибки

$$0 = \frac{d}{d\hat{x}_k^+} \mathbb{E} [x_k^T x_k - 2x_k^T \hat{x}_k^+ + (\hat{x}_k^+)^T \hat{x}_k^+ \mid \mathbb{Y}_k] .$$

Так как взятие производной является линейной операцией, можно внести ее в функцию математического ожидания

$$\begin{aligned}0 &= \mathbb{E} [-2 (x_k - \hat{x}_k^+) \mid \mathbb{Y}_k] = 2\hat{x}_k^+ - 2\mathbb{E} [x_k \mid \mathbb{Y}_k] , \\ \hat{x}_k^+ &= \mathbb{E} [x_k \mid \mathbb{Y}_k] ,\end{aligned}\tag{15}$$

где $\frac{dx_k}{d\hat{x}_k^+} = 0$, так как истинное значение состояния системы не зависит от оценки этого состояния.

Таким образом, оценка состояния системы, минимизирующая средне-квадратичную функцию ошибки, – это условное математическое ожидание истинного значения состояния системы, учитывающее все измерения входного и выходного сигналов до текущего момента времени, включая этот момент.

В общем случае решить задачу (15) очень сложно, так как для ее решения нам необходимо знать все функции плотности распределения случайных величин Y_k , количество которых увеличивается с ростом k . Также, для расчета условного математического ожидания потребуется вычислить многомерный интеграл

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Для решения задачи (15) могут быть использованы многочастичные фильтры, что потребует больших вычислительных мощностей. Однако полученный результат может оказаться не соответствующим действительности, если рассматриваемая система обладает высокой степенью нелинейности.

Рассмотрим некоторое множество, состоящее из большого числа взаимно независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание и дисперсию. Тогда сумма всех величин, определяющих рассматриваемое множество, может быть аппроксимирована нормально распределенной случайной величиной. Более того, увеличение числа случайных величин в рассматриваемом множестве приводит к более точным оценкам. Данный результат известен в литературе как *центральная предельная теорема* [1].

Таким образом, основываясь на центральной предельной теореме, в дальнейшем будем решать задачу (15), исходя из предположения, что все рассматриваемые случайные величины распределены нормально. На прак-

тике данное предположение не выполняется в случае, если используемая в расчетах система нелинейна, то есть и при рассмотрении модели батареи с использованием метода эквивалентной цепи. Тем не менее, нами будет показано, как решить задачу (15) в таком случае, сделав некоторые допущения и не уменьшив точность оценки.

4.5 Основные шаги фильтра Калмана

В основе фильтра Калмана лежит ПВП, использующий предположение о нормальном распределении состояний и шумов в системе. Таким образом, фильтр Калмана состоит из двух основополагающих шагов, повторяющихся последовательно на каждой итерации и позволяющих отыскать решение (15). Сначала на каждом шаге k вычисляется экстраполированное значение состояния $\hat{x}_k^- = \mathbb{E}[x_k | \mathbb{Y}_{k-1}]$ с использованием измерений, сделанных до шага $k - 1$. Затем выполняется коррекция состояния системы, используя текущее измерение y_k : $\hat{x}_k^+ = \mathbb{E}[x_k | \mathbb{Y}_k]$. Так как шаги экстраполяции и коррекции требуют знания состояния системы только на предыдущем шаге, то количество требуемых ресурсов для решения задачи (15) остается постоянным на каждой итерации, что позволяет использовать данный подход в различных встраиваемых системах.

Введем переменную $\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$ для обозначения ошибки прогнозирования на каждом шаге. Отметим, что мы не можем вычислить точные значения данной величины, так как в действительности нам не известны значения x_k . Однако мы можем вычислить ряд статистических соотношений с использованием только измеримых величин для минимизации ошибки прогнозирования.

Рассмотрим также величину $\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k$, где $\hat{y}_k = \mathbb{E}[y_k - \mathbb{Y}_{k-1}]$ — значение измеряемой величины, предсказываемое на каждой итерации. Таким образом, \tilde{y}_k — это разница между истинным измеренным значением и оце-

ненным, которое мы стремимся минимизировать на каждой итерации, то есть получить значение $\tilde{y}_k = 0$. Если предыдущее равенство не выполняется, то мы используем новую информацию, поступающую на вход фильтра и содержащуюся в \tilde{y}_k , для улучшения качества оценки состояния системы.

Прежде чем приступить к выводу основных шагов фильтра Калмана покажем, что обе случайные величины \tilde{x}_k и \tilde{y}_k имеют математическое ожидание, равное нулю, то есть подчиняются нормальному закону распределения.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\tilde{x}_k^-] &= \mathbb{E} [x_k - \hat{x}_k^-] \\
&= \mathbb{E} [x_k] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}]] \\
&= \mathbb{E} [x_k] - \mathbb{E} [x_k] = 0 \\
\mathbb{E} [\tilde{y}_k] &= \mathbb{E} [y_k - \hat{y}_k] \\
&= \mathbb{E} [y_k] - \mathbb{E} [\mathbb{E} [y_k | \mathbb{Y}_{k-1}]] \\
&= \mathbb{E} [y_k] - \mathbb{E} [y_k] = 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что \tilde{x}_k^- не коррелирует с измерениями, сделанными до момента времени k , так как их вклад был учтен ранее в переменной \hat{x}_k^- :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | \mathbb{Y}_{k-1}] &= \mathbb{E} [x_k - \hat{x}_k^- | \mathbb{Y}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E} [x_k - \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}] | \mathbb{Y}_{k-1}] \\
&= \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}] - \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}] \\
&= 0 = \mathbb{E} [\tilde{x}_k^-].
\end{aligned}$$

Введем рекурсивный механизм минимизации ошибки прогнозирования двумя разными способами. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | \mathbb{Y}_k] &= \mathbb{E} [x_k - \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}] | \mathbb{Y}_k] \\
&= \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_k] - \mathbb{E} [\hat{x}_k^- | \mathbb{Y}_k] \\
&= \hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^-.
\end{aligned} \tag{16}$$

С другой стороны

$$\mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | \mathbb{Y}_k] = \mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | \mathbb{Y}_{k-1}, y_k] = \mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | y_k], \quad (17)$$

так как \tilde{x}_k^- не коррелирует с предыдущими измерениями.

Объединяя полученные в (16) и (17) результаты в один, получаем решение, соответствующее ПВП

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + \mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | y_k],$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\tilde{x}_k^- | y_k] &= \mathbb{E} [\tilde{x}_k^-] + \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1} (y_k - \mathbb{E} [y_k]) \\ &= \mathbb{E} [\tilde{x}_k^-] + \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1} (\tilde{y}_k + \hat{y}_k - \mathbb{E} [\tilde{y}_k + \hat{y}_k]) \\ &= 0 + \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1} (\tilde{y}_k + \hat{y}_k - (0 + \hat{y}_k)) \\ &= \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1} \tilde{y}_k = L_k \tilde{y}_k, \end{aligned}$$

L_k – коэффициент усиления Калмана.

Таким образом, общий вид решения ПВП

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k \tilde{y}_k.$$

Подставляя данное решение в формулу для оценки ошибки прогнозирования, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k^+ &= x_k - (\hat{x}_k^- + L_k \tilde{y}_k) \\ &= \tilde{x}_k^- - L_k \tilde{y}_k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x},k}^+ &= \mathbb{E} [(\tilde{x}_k^- - L_k \tilde{y}_k) (\tilde{x}_k^- - L_k \tilde{y}_k)^T] \\ &= \mathbb{E} [(\tilde{x}_k^-) (\tilde{x}_k^-)^T - L_k \tilde{y}_k (\tilde{x}_k^-)^T - \tilde{x}_k^- (\tilde{y}_k)^T L_k^T + L_k \tilde{y}_k (\tilde{y}_k)^T L_k^T] \\ &= \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T, \end{aligned}$$

где $\mathbb{E} [\tilde{y}_k (\tilde{x}_k^-)^T] = \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T$, $\mathbb{E} [\tilde{x}_k^- (\tilde{y}_k)^T] = L_k \Sigma_{\tilde{y},k}$.

На основе всего выше изложенного получаем последовательность основных шагов фильтра Калмана или гауссовского ПВП.

1. *Шаг оценки состояния (экстраполяция)* : в конце итерации мы получаем наилучшую из возможных оценку вектора состояния \hat{x}_k^+ , используя информацию о системе до момента k и общий вид системы (10).

- (a) Обновление вектора оценки состояния системы x_k

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= \mathbb{E} [x_k | \mathbb{Y}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E} [f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) | \mathbb{Y}_{k-1}].\end{aligned}\tag{18}$$

- (b) Обновление ковариационной матрицы ошибок состояния системы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^- = \mathbb{E} \left[(\tilde{x}_k^-) (\tilde{x}_k^-)^T \right],\tag{19}$$

где $\tilde{x}_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$.

- (c) Прогнозирование выхода системы y_k

$$\begin{aligned}\hat{y}_k &= \mathbb{E} [y_k | \mathbb{Y}_{k-1}] \\ &= \mathbb{E} [h(x_k, u_k, v_k) | \mathbb{Y}_{k-1}].\end{aligned}\tag{20}$$

2. *Шаг оценки ковариационной матрицы (коррекция)*: оценка ковариационной матрицы $\Sigma_{\tilde{x},k}^+$

- (a) Подсчет коэффициента усиления Калмана L_k

$$L_k = \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1}.\tag{21}$$

- (b) Коррекция вектора состояния x_k с использованием коэффициента усиления Калмана и наблюдаемых значений в момент времени k

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - \hat{y}_k)\tag{22}$$

(с) Коррекция значений ковариационной матрицы ошибок состояния системы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^+ = \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T. \quad (23)$$

4.6 Extended Kalman Filter

Фильтр Калмана – это оптимальный способ минимизации среднеквадратической ошибки оценки состояния системы, имеющей белые или гауссовские шумы. Однако не все системы являются линейными, в том числе и SS-система, описывающая внутреннее состояние батареи, – (9). Таким образом, стандартные шаги фильтра Калмана не могут быть применены напрямую к рассматриваемой системе, но мы можем расширить ПВП, используя уравнения (10) и (11) [31].

Одним из способов обобщения стандартного фильтра Калмана на случай нелинейной системы является Extended Kalman Filter (EKF). Основная идея данного алгоритма – это аналитическая линеаризация нелинейной модели системы в каждый момент времени. Данный подход может быть использован для систем со слабыми нелинейностями, поскольку для сильно нелинейных систем возможны большие значения погрешностей итоговой оценки состояния.

В основе EKF лежат два допущения, позволяющие использовать ПВП для случая нелинейных систем.

1. При расчете оценки выхода нелинейной системы предполагаем, что математическое ожидание нелинейной функции состояния системы совпадает с нелинейной функцией математического ожидания состояния системы

$$\mathbb{E}[f(x)] \approx f(\mathbb{E}[x]).$$

В общем случае это не верно и выполняется только тогда, когда $f(x)$ – линейная функция.

2. При расчете ковариационных матриц ошибок состояния системы будем использовать усеченный ряд Тейлора для линеаризации системы в окрестности точки, то есть ряд без старших членов высокого порядка.

Данные допущения являются причиной, по которой ЕКФ рекомендуют использовать для систем со слабыми нелинейностями.

Основные шаги ЕКФ

1. Шаг оценки состояния

- (a) Обновление вектора оценки состояния системы x_k

В соответствии с (18) и предположениями, положенными в основу ЕКФ, получаем

$$\begin{aligned}\hat{x}_k^- &= \mathbb{E} [f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) | \mathbb{Y}_{k-1}] \\ &\approx f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}),\end{aligned}$$

где $\bar{w}_{k-1} = \mathbb{E}[w_{k-1}]$.

- (b) Обновление ковариационной матрицы ошибок состояния системы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

Первым шагом выполним оценку \tilde{x}_k^-

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- \\ &= f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}).\end{aligned}\tag{24}$$

В соответствии со вторым предположением, положенным в основу ЕКФ, разложим первое слагаемое в ряд Тейлора в окрестно-

сти точки $p_{k-1} = \{\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}\}$ и возьмем первые два члена ряда

$$x_k \approx f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}) + \underbrace{\frac{df(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{dx_{k-1}} \Big|_{p_{k-1}}}_{\hat{A}_{k-1}} (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}^+) + \underbrace{\frac{df(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{dw_{k-1}} \Big|_{p_{k-1}}}_{\hat{B}_{k-1}} (w_{k-1} - \bar{w}_{k-1})$$

Подставляем получившееся выражение в уравнение (24)

$$\tilde{x}_k^- \approx \hat{A}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^+ + \hat{B}_{k-1} \tilde{w}_{k-1}.$$

Таким образом, в соответствии с (19) и предположением, что оценка состояния системы не коррелирует с шумом процесса в один и тот же момент времени, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{x},k}^- &= \mathbb{E}[(\tilde{x}_k^-)(\tilde{x}_k^-)^T] \\ &\approx \mathbb{E}[(\hat{A}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^+ + \hat{B}_{k-1} \tilde{w}_{k-1})(\hat{A}_{k-1} \tilde{x}_{k-1}^+ + \hat{B}_{k-1} \tilde{w}_{k-1})^T] \\ &= \hat{A}_{k-1} \mathbb{E}[(\tilde{x}_{k-1}^+)(\tilde{x}_{k-1}^+)^T] \hat{A}_{k-1}^T + \hat{B}_{k-1} \mathbb{E}[\tilde{w}_{k-1}] \mathbb{E}[(\tilde{x}_{k-1}^+)^T] \hat{A}_{k-1}^T \\ &\quad + \hat{A}_{k-1} \mathbb{E}[\tilde{x}_{k-1}^+] \mathbb{E}[\tilde{w}_{k-1}^T] \hat{B}_{k-1}^T + \hat{B}_{k-1} \mathbb{E}[\tilde{w}_{k-1} \tilde{w}_{k-1}^T] \hat{B}_{k-1}^T \\ &= \hat{A}_{k-1} \Sigma_{\tilde{x},k-1}^+ \hat{A}_{k-1}^T + \hat{B}_{k-1} \Sigma_{\tilde{w}} \hat{B}_{k-1}^T, \end{aligned}$$

где ошибка оценки значения состояния системы подчиняется нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием.

Для реализации данного выражения программными средствами нам необходимо знать представление матриц \hat{A}_{k-1} и \hat{B}_{k-1} . Обе эти матрицы являются функциями времени, которые могут быть получены аналитически из SS-модели системы. Приведем общий вид матрицы \hat{A}_k

$$\hat{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{df_1(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,1}} & \frac{df_1(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,2}} & \dots & \frac{df_1(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,n}} \\ \frac{df_2(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,1}} & \frac{df_2(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,2}} & \dots & \frac{df_2(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,1}} & \frac{df_n(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,2}} & \dots & \frac{df_n(x_k, u_k, w_k)}{dx_{k,n}} \end{bmatrix}_{p_k},$$

где $x_{k,i}$ – i -компонента n -мерного вектора состояния x_k , $f_j(\cdot)$ – j -компонента уравнения состояния системы. Матрица \hat{B}_k выводится аналогичным образом.

Приведем алгоритм расчета полных производных, входящих в матрицу \hat{A}_k :

$$\begin{aligned} df(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) &= \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial x_{k-1}} dx_{k-1} \\ &+ \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial u_{k-1}} du_{k-1} \\ &+ \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial w_{k-1}} dw_{k-1}. \end{aligned}$$

Разделим обе части данного выражения на dx_{k-1}

$$\begin{aligned} \frac{df(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{dx_{k-1}} &= \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial x_{k-1}} \\ &+ \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial u_{k-1}} \underbrace{\frac{du_{k-1}}{dx_{k-1}}}_0 \\ &+ \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial w_{k-1}} \underbrace{\frac{dw_{k-1}}{dx_{k-1}}}_0 \\ &= \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial x_{k-1}}. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{df(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{dw_{k-1}} = \frac{\partial f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1})}{\partial w_{k-1}}.$$

(с) Прогнозирование выхода системы y_k

В соответствии с (20) и предположением 1, положенным в основу ЕКФ, получаем

$$\begin{aligned}\hat{y}_k &= \mathbb{E} [h(x_k, u_k, v_k) | \mathbb{Y}_{k-1}] \\ &\approx h(\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k),\end{aligned}$$

где $\bar{v}_k = \mathbb{E}[v_k]$.

2. Шаг оценки ковариационной матрицы

(а) Подсчет коэффициента усиления Калмана L_k

Ошибка прогнозирования выходного сигнала имеет вид

$$\tilde{y}_k = y_k - \hat{y}_k = h(x_k, u_k, v_k) - h(\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k).$$

Для подсчета матрицы L_k на основе формулы (21) необходимо вычислить ковариационную матрицу $\Sigma_{\tilde{y},k}^-$. Для этого воспользуемся вторым основным предположением, положенным в основу ЕКФ: разложим выход системы y_k в ряд Тейлора в окрестности точки $q_k = \{\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k\}$, взяв первый член ряда, в соответствии с общей формулой (11)

$$\begin{aligned}y_k &\approx h(\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k) + \underbrace{\left. \frac{dh(x_k, u_k, v_k)}{dx_k} \right|_{q_k}}_{\hat{C}_k} (x_k - \hat{x}_k^-) \\ &\quad + \underbrace{\left. \frac{dh(x_k, u_k, v_k)}{dv_k} \right|_{q_k}}_{\hat{D}_k} (v_k - \bar{v}_k) \\ \tilde{y}_k &\approx \hat{C}_k \tilde{x}_k^- + \hat{D}_k \tilde{v}_k\end{aligned}$$

Аналогично шагу 1(b) можно показать, что полные производные, входящие в матрицы \hat{C}_k и \hat{D}_k , могут быть найдены как

$$\frac{dh(x_k, u_k, v_k)}{dx_k} = \frac{\partial h(x_k, u_k, v_k)}{\partial x_k}$$

$$\frac{dh(x_k, u_k, v_k)}{dv_k} = \frac{\partial h(x_k, u_k, v_k)}{\partial v_k}.$$

Интересующие нас ковариационные матрицы, входящие в формулу (21), могут быть вычислены как

$$\Sigma_{\tilde{y},k} \approx \hat{C}_k \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T + \hat{D}_k \Sigma_{\tilde{v}} \hat{D}_k^T$$

$$\Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \approx \mathbb{E}[(\tilde{x}_k^-)(\hat{C}_k \tilde{x}_k^- + \hat{D}_k \tilde{v}_k)^T]$$

$$= \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T.$$

Отсюда следует, что

$$L_k = \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T [\hat{C}_k \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T + \hat{D}_k \Sigma_{\tilde{v}} \hat{D}_k^T]^{-1}.$$

(b) Коррекция вектора состояния x_k

Данный шаг выполняется без изменений в соответствии с (22)

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - \hat{y}_k).$$

(c) Коррекция значений ковариационной матрицы ошибок состояния системы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

Так как ранее нами были вычислены все необходимые ковариационные матрицы, входящие в формулу (23), данный шаг выполняется без изменений:

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^+ = \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T.$$

4.7 Sigma-Point Kalman Filter

Sigma-Point Kalman Filter (SPKF) – алгоритм, позволяющий получить оценку состояния системы, не требующий при этом линеаризации модели состояния системы за счет генерации специального набора σ -точек [35]. Также приведем ряд основных преимуществ выгодно отличающих SPKF от EKF.

1. SPKF не требует аналитического вычисления производных модели, одного из наиболее подверженных ошибкам шагов ЕKF;
2. Функции, образующие модель системы, не обязательно должны быть дифференцируемы;
3. SPKF позволяет достичь лучшей оценки ковариационных матриц модели по сравнению с ЕKF, благодаря чему можно получить более качественные оценки значений состояния системы;
4. Чем выше нелинейность модели, тем более точный результат будет предоставлять SPKF в сравнении с ЕKF.

Стоит отметить, что вычислительная сложность SPKF сравнима с вычислительной сложностью ЕKF.

Основой SPKF служит алгоритм выбора начальных точек из распределенного случайным образом входного сигнала. Обозначим выбираемый на каждой итерации набор точек как \mathcal{X} и будем называть его в дальнейшем *входным* набором σ -точек для нелинейной функции. Набор σ -точек будем выбирать таким образом, чтобы взвешенное среднее и ковариация \mathcal{X} совпадали со средним \bar{x} и ковариацией $\Sigma_{\bar{x}}$ случайного входного сигнала.

Используя точки из набора \mathcal{X} в качестве входных значений для нелинейной функции состояния системы, получим еще один набор σ -точек \mathcal{Y} , который в дальнейшем будем называть *выходным*. По аналогии с входным сигналом, среднее \bar{y} и ковариация $\Sigma_{\bar{y}}$ случайного выходного сигнала системы аппроксимируются средним и ковариацией выходного набора \mathcal{Y} .

Отметим, что количество σ -точек, входящих в набор \mathcal{X} , является конечным, заранее определенным числом. Если случайный входной вектор x имеет размерность L , среднее \bar{x} и ковариационную матрицу $\Sigma_{\bar{x}}$, тогда в наборе \mathcal{X} будет сгенерировано $p + 1 = 2L + 1$ σ -точек

$$\mathcal{X} = \{\bar{x}, \bar{x} + \gamma\sqrt{\Sigma_{\bar{x}}}, \bar{x} - \gamma\sqrt{\Sigma_{\bar{x}}}\}, \quad (25)$$

где γ – весовой коэффициент, используемый для регулировки и настройки SPKF, Σ – симметрическая положительно определенная ковариационная матрица, допускающая разложение Холецкого вида $\Sigma = RR^T$, R – верхняя треугольная матрица, R^T – нижняя треугольная матрица [19].

Отметим, что в общем случае \bar{x} – вектор, а $\gamma\sqrt{\Sigma_{\tilde{x}}}$ – матрица, таким образом, с точки зрения линейной алгебры, запись вида (25) не имеет математического смысла, но, в данной работе обозначение $\bar{x} + \gamma\sqrt{\Sigma_{\tilde{x}}}$ используется для простоты восприятия и означает, что вектор \bar{x} прибавляется к каждому столбцу матрицы $\gamma\sqrt{\Sigma_{\tilde{x}}}$.

Взвешенное среднее и ковариация элементов, входящих в \mathcal{X} , равняются истинным значениям среднего и ковариации вектора x для некоторого набора $\{\gamma, \alpha_i^{(m)}, \alpha_i^{(c)}\}$:

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{X}_i$$

$$\Sigma_{\tilde{x}} = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{X}_i - \bar{x})(\mathcal{X}_i - \bar{x})^T,$$

где \mathcal{X}_i – i -ый вектор, входящий в набор \mathcal{X} , $\alpha_i^{(m)}$ и $\alpha_i^{(c)}$ – вещественные множители, сумма которых должна равняться единице.

$\alpha_i^{(m)}$ и $\alpha_i^{(c)}$ – параметры настройки SPKF, в зависимости от выбора этих коэффициентов определяют различные варианты SPKF. Наиболее популярными и часто используемыми являются Unscented Kalman Filter (UKF) и Central-Difference Kalman Filter (CDKF), Таблица 1.

Метод	γ	$\alpha_0^{(m)}$	$\alpha_k^{(m)}$	$\alpha_0^{(c)}$	$\alpha_k^{(c)}$
UKF	$\sqrt{L + \lambda}$	$\frac{\lambda}{L + \lambda}$	$\frac{1}{2(L + \lambda)}$	$\frac{\lambda}{L + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta)$	$\frac{1}{2(L + \lambda)}$
CDKF	h	$\frac{h^2 - L}{h^2}$	$\frac{1}{2h^2}$	$\frac{h^2 - L}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$

Таблица 1: Параметры настройки Sigma-Point Kalman Filter

Как было отмечено ранее, каждый из входных случайных векторов \mathcal{X}_i , входящих в набор \mathcal{X} , проходит через нелинейную функцию $f(\cdot)$, тем

самым, образуя набор выходных σ -точек \mathcal{Y} , где $\mathcal{Y}_i = f(\mathcal{X}_i)$. Таким образом, выходные значения среднего и ковариации рассчитываются как

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{Y}_i$$

$$\Sigma_{\tilde{y}} = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{Y}_i - \bar{y}) (\mathcal{Y}_i - \bar{y})^T.$$

Отметим, что константы $\alpha_i^{(m)}$, $\alpha_i^{(c)}$, γ и количество σ -точек $p + 1 = 2L + 1$ остаются неизменными как для входного набора \mathcal{X} , так и для выходного набора \mathcal{Y} . Однако размерности входящих в рассматриваемые наборы векторов, не обязательно совпадают.

Основные шаги SPKF

1. Шаг оценки состояния

(а) Обновление вектора оценки состояния системы x_k

Наша задача заключается в оценке вектора состояния системы

$$\hat{x}_k^- = \mathbb{E} [f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \mid \mathbb{Y}_{k-1}],$$

с использованием σ -точек, и дальнейшего использования получившегося набора σ -точек для подсчета значений функции $f(\cdot)$, и вычисления значения \hat{x}_k^- как среднего значения выходного набора σ -точек.

Любой динамический процесс имеет несколько источников возникновения случайных величин, к которым можно отнести: состояние системы, шум процесса и шум датчиков. Для реализации подхода, основанного на использовании σ -точек, объединим все случайные величины в один вектор x_k^a , расширив вектор состояния системы x_k

$$x_k^a = \begin{bmatrix} x_k \\ w_k \\ v_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\tilde{x}_k}^a = \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{x},k} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{\tilde{w}} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{\tilde{v}} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, вектор оценки состояния системы $\hat{x}_{k-1}^{a,+}$ и ковариационная матрица $\Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+}$ приобретают вид

$$\hat{x}_{k-1}^{a,+} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k-1}^+ \\ \bar{w} \\ \bar{v} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+} = \begin{bmatrix} \Sigma_{\tilde{x},k-1}^+ & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{\tilde{w}} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{\tilde{v}} \end{bmatrix}.$$

Введенные величины используются для составления входного набора σ -точек \mathcal{X} (см. Рис. 14, где белые квадратики использованы для обозначения нулевых элементов матрицы)

$$\mathcal{X}_{k-1}^{a,+} = \left\{ \hat{x}_{k-1}^{a,+}, \hat{x}_{k-1}^{a,+} + \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+}}, \hat{x}_{k-1}^{a,+} - \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+}} \right\}.$$

Полученный набор $\mathcal{X}_{k-1}^{a,+}$ используется для вычисления значений функции $f(\cdot)$:

$$\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} = f\left(\mathcal{X}_{k-1,i}^{x,+}, u_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1,i}^{w,+}\right),$$

где $\mathcal{X}_{k-1,i}^{x,+}$ и $\mathcal{X}_{k-1,i}^{w,+}$ — i σ -точки матриц $\mathcal{X}_{k-1}^{x,+}$ и $\mathcal{X}_{k-1}^{w,+}$ соответственно (см. Рис. 14).

Исходя из выводов, приведенных ранее, получаем, что оценка вектора состояния вычисляется как

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= \mathbb{E} \left[f\left(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1} \mid \mathbb{Y}_{k-1}\right) \right] \\ &\approx \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} f\left(\mathcal{X}_{k-1,i}^{x,+}, u_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1,i}^{w,+}\right) \\ &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{X}_{k,i}^{x,-}. \end{aligned}$$

- (b) Обновление ковариационной матрицы ошибок состояния системы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

На данном шаге нам необходимо вычислить ковариационную матрицу $\Sigma_{\tilde{x},k}^- = \mathbb{E}[(\tilde{x}_k^-)(\tilde{x}_k^-)^T]$. Для этого сначала вычислим

$$\tilde{\mathcal{X}}_{k,i}^{x,-} = \mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-$$

для каждой i -ой σ -точки, затем, по формуле

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^- = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} \left(\tilde{\mathcal{X}}_{k,i}^{x,-} \right) \left(\tilde{\mathcal{X}}_{k,i}^{x,-} \right)^T,$$

получим значения элементов ковариационной матрицы $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$.

- (c) Прогнозирование выхода системы y_k

Для вычисления значений $\hat{y}_k = \mathbb{E}[h(x_k, u_k, v_k) | \mathbb{Y}_{k-1}]$ воспользуемся набором σ -точек, характеризующих случайные процессы в x_k и v_k :

$$\begin{aligned} \hat{y}_k &= \mathbb{E}[h(x_k, u_k, v_k) | \mathbb{Y}_{k-1}] \\ &\approx \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} h(\mathcal{X}_{k,i}^{x,i}, u_k, \mathcal{X}_{k,i}^{v,+}) \\ &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{Y}_{k,i}. \end{aligned}$$

2. Шаг оценки ковариационной матрицы

- (a) Подсчет коэффициента усиления Калмана L_k

$L_k = \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1}$ вычисляется с использованием значений, полученных на предыдущих шагах

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{y},k} &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{k,i} - \hat{y}_k) (\mathcal{Y}_{k,i} - \hat{y}_k)^T \\ \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-) (\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-)^T. \end{aligned}$$

(b) Коррекция вектора состояния x_k

Для вычисления значений вектора $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k(y_k - \hat{y}_k)$ все требуемые величины были получены на предыдущих шагах.

(c) Коррекция значений ковариационной матрицы ошибок состояния система $\Sigma_{\tilde{x},k}^-$

На последнем шаге ковариационная матрица рассчитывается напрямую в соответствии с формулой оптимальности

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^+ = \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T.$$

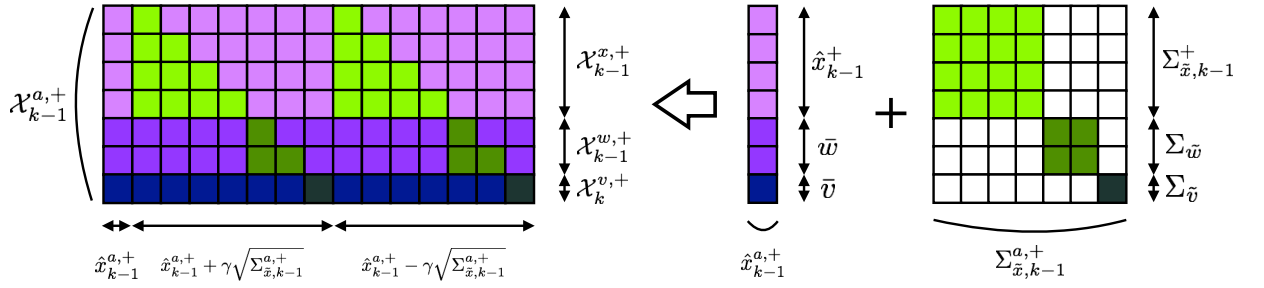


Рис. 14: Схематическое представление составления входного набора $\mathcal{X}_{k-1}^{a,+}$ σ -точек

4.8 Dual Kalman Filter

Dual-фильтрация с использованием фильтра Калмана подразумевает использование двух нелинейных фильтров Калмана (см. Рис. 15): один используется для оценки состояния системы, второй – для оценки параметров этой системы [34]. Рассмотрим общую SS-модель системы, где вектор параметров θ_k включен в явном виде

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, \theta_{k-1})$$

$$y_k = h(x_k, u_k, v_k, \theta_{k-1}).$$

Переменные, не зависящие от времени, могут быть включены в функции $f(\cdot)$, $h(\cdot)$, но не в вектор θ_k . Выразим зависимость параметров системы от ее состояния

$$\theta_k = \theta_{k-1} + r_{k-1}$$

$$d_k = h(f(x_{k-1}, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}, \theta_{k-1}), u_k, e_k, \theta_{k-1}).$$

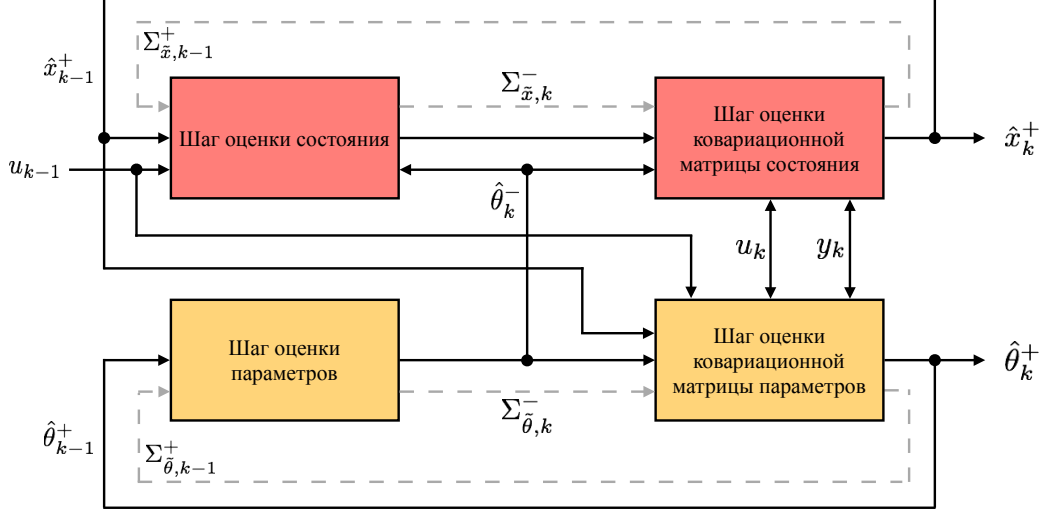


Рис. 15: Dual Kalman Filter: взаимодействие двух нелинейных фильтров Калмана

4.8.1 Dual Extended Kalman Filter

Основные шаги Extended Kalman Filter были подробно приведены нами в параграфе 4.6, поэтому для упрощения записи в данном разделе приведем основные формулы, позволяющие получить одновременную оценку как вектора состояния системы, так и ее параметров [33].

Рассмотрим SS-модель системы

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, \theta_k, w_k)$$

$$y_k = h(x_k, u_k, \theta_k, v_k)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + r_k$$

$$d_k = g(x_k, u_k, \theta_k, e_k),$$

где w_k, v_k, r_k, e_k – независящие друг от друга шумы системы с математическими ожиданиями $\bar{w}, \bar{v}, 0, \bar{e}$ и ковариационными матрицами $\Sigma_{\bar{w}}, \Sigma_{\bar{v}}, \Sigma_{\bar{r}}, \Sigma_{\bar{e}}$ соответственно.

Введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned}
\hat{A}_k &= \left. \frac{df(x_k, u_k, \hat{\theta}_k^-, w_k)}{dx_k} \right|_{x_k=\hat{x}_k^+} & \hat{B}_k &= \left. \frac{df(x_k, u_k, \hat{\theta}_k^-, w_k)}{dw_k} \right|_{w_k=\bar{w}} \\
\hat{C}_k^x &= \left. \frac{dh(x_k, u_k, \hat{\theta}_k^-, v_k)}{dx_k} \right|_{x_k=\hat{x}_k^-} & \hat{D}_k^x &= \left. \frac{dh(x_k, u_k, \hat{\theta}_k^-, v_k)}{dv_k} \right|_{v_k=\bar{v}} \\
\hat{C}_k^\theta &= \left. \frac{dg(\hat{x}_k^-, u_k, \theta, e_k)}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} & \hat{D}_k^\theta &= \left. \frac{dg(\hat{x}_k^-, u_k, \theta, e_k)}{de_k} \right|_{e_k=\bar{e}}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Основные шаги Dual Extended Kalman Filter

Инициализируем переменные на шаге $k = 0$, далее будем предполагать $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_0^+ &= \mathbb{E}[\theta_0] & \Sigma_{\theta,0}^+ &= \mathbb{E}[(\theta_0 - \hat{\theta}_0^+)(\theta_0 - \hat{\theta}_0^+)^T] \\
\hat{x}_0^+ &= \mathbb{E}[x_0] & \Sigma_{\tilde{x},0}^+ &= \mathbb{E}[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T].
\end{aligned}$$

1. Шаг оценки параметров

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_k^- &= \hat{\theta}_{k-1}^+ \\
\Sigma_{\tilde{\theta},k}^- &= \Sigma_{\tilde{\theta},k-1}^+ + \Sigma_{\tilde{r}}.
\end{aligned}$$

2. Шаг оценки состояния

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k^- &= f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \hat{\theta}_k^-, \bar{w}) \\
\Sigma_{\tilde{x},k}^- &= \hat{A}_{k-1} \Sigma_{\tilde{x},k-1}^+ \hat{A}_{k-1}^T + \hat{B}_{k-1} \Sigma_{\tilde{w}} \hat{B}_{k-1}^T.
\end{aligned}$$

3. Шаг оценки ковариационной матрицы состояния

$$\begin{aligned}
L_k^x &= \Sigma_{\tilde{x},k}^- (\hat{C}_k^x)^T [\hat{C}_k^x \Sigma_{\tilde{x},k}^- (\hat{C}_k^x)^T + \hat{D}_k^x \Sigma_{\tilde{v}} (\hat{D}_k^x)^T]^{-1} \\
\hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + L_k^x [y_k - h(\hat{x}_k^-, u_k, \hat{\theta}_k^-, \bar{v})] \\
\Sigma_{\tilde{x},k}^+ &= \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k^x \Sigma_{\tilde{y},k} (L_k^x)^T.
\end{aligned}$$

4. Шаг оценки ковариационной матрицы параметров

$$\begin{aligned} L_k^\theta &= \Sigma_{\tilde{\theta},k}^- (\hat{C}_k^\theta)^T [\hat{C}_k^\theta \Sigma_{\tilde{\theta},k}^- (\hat{C}_k^\theta)^T + \hat{D}_k^\theta \Sigma_{\tilde{e}} (\hat{D}_k^\theta)^T]^{-1} \\ \hat{\theta}_k^+ &= \hat{\theta}_k^- + L_k^\theta [y_k - g(\hat{x}_k^-, u_k, \hat{\theta}_k^-, \bar{e})] \\ \Sigma_{\tilde{\theta},k}^+ &= \Sigma_{\tilde{\theta},k}^- - L_k^\theta \Sigma_{\tilde{d},k} (L_k^\theta)^T. \end{aligned}$$

4.8.2 Dual Sigma-Point Kalman Filter

Аналогично предыдущему разделу приведем основные шаги Dual Sigma-Point Kalman Filter, позволяющего получить одновременную оценку состояния и параметров модели. Так как вывод формул основных шагов SPKF был рассмотрен нами подробно в разделе 4.7, в данном параграфе приведем шаги необходимые для реализации метода [36].

Рассмотрим SS-модель системы

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}, \theta_{k-1}) \\ y_k &= h(x_k, u_k, v_k, \theta_k) \\ \theta_k &= \theta_{k-1} + r_{k-1} \\ d_k &= h(f(x_{k-1}, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}, \theta_{k-1}), u_k, \bar{v}_k, \theta_{k-1}, e_k), \end{aligned}$$

где w_k, v_k, r_k, e_k – независимые друг от друга шумы системы с математическими ожиданиями $\bar{w}, \bar{v}, 0, \bar{e}$ и ковариационными матрицами $\Sigma_{\bar{w}}, \Sigma_{\bar{v}}, \Sigma_{\bar{r}}, \Sigma_{\bar{e}}$ соответственно.

Также введем в рассмотрение матрицы

$$\begin{aligned} x_k^a &= [x_k^T, w_k^T, v_k^T]^T \\ \mathcal{X}_k^a &= [(\mathcal{X}_k^x)^T, (\mathcal{X}_k^w)^T, (\mathcal{X}_k^v)^T]^T \\ p &= 2 \times \dim(x_k^a), \end{aligned}$$

где $\dim(x_k^a)$ – размерность вектора x_k^a .

Основные шаги Dual Sigma-Point Kalman Filter

Инициализируем переменные на шаге $k = 0$, далее будем предполагать $k = 1, 2, \dots$.

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_0^+ &= \mathbb{E}[\theta_0] \\
 \hat{x}_0^+ &= \mathbb{E}[x_0] \\
 \hat{x}_0^{a,+} &= \mathbb{E}[x_0^a] = [(x_0^+)^T, \bar{w}, \bar{v}]^T \\
 \Sigma_{\tilde{\theta},0}^+ &= \mathbb{E}[(\theta_0 - \hat{\theta}_0^+)(\theta_0 - \hat{\theta}_0^+)^T] \\
 \Sigma_{\tilde{x},0}^+ &= \mathbb{E}[(x_0 - \hat{x}_0^+)(x_0 - \hat{x}_0^+)^T] \\
 \Sigma_{\tilde{x},0}^{a,+} &= \mathbb{E}[(x_0^a - \hat{x}_0^{a,+})(x_0^a - \hat{x}_0^{a,+})^T] = \text{diag}(\Sigma_{\tilde{x},0}^+, \Sigma_{\tilde{w}}, \Sigma_{\tilde{v}}),
 \end{aligned}$$

где $\text{diag}(\Sigma_{\tilde{x},0}^+, \Sigma_{\tilde{w}}, \Sigma_{\tilde{v}})$ – диагональная матрица, на диагонали у которой последовательно расположены матрицы $\Sigma_{\tilde{x},0}^+, \Sigma_{\tilde{w}}, \Sigma_{\tilde{v}}$.

1. Шаг оценки параметров

$$\begin{aligned}
 \hat{\theta}_k^- &= \hat{\theta}_{k-1}^+ \\
 \Sigma_{\tilde{\theta},k}^- &= \Sigma_{\tilde{\theta},k-1}^+ + \Sigma_{\tilde{r}}.
 \end{aligned}$$

2. Шаг оценки состояния

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X}_{k-1}^{a,+} &= \left\{ \hat{x}_{k-1}^{a,+}, \hat{x}_{k-1}^{a,+} + \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+}}, \hat{x}_{k-1}^{a,+} - \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{x},k-1}^{a,+}} \right\} \\
 \mathcal{X}_{k,i}^{x,-} &= f \left(\mathcal{X}_{k-1,i}^{x,+}, u_{k-1}, \mathcal{X}_{k-1,i}^{w,+}, \hat{\theta}_k^- \right) \\
 \hat{x}_k^- &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{X}_{k,i}^{x,-} \\
 \Sigma_{\tilde{x},k}^- &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-)(\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-)^T.
 \end{aligned} \tag{27}$$

3. Шаг оценки выхода системы, фильтр оценки параметров

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_k &= \left\{ \hat{\theta}_k^-, \hat{\theta}_k^- + \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{\theta},k}^-}, \hat{\theta}_k^- - \gamma \sqrt{\Sigma_{\tilde{\theta},k}^-} \right\} \\
 \mathcal{D}_{k,i} &= h(f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}, \mathcal{W}_{k,i}), u_k, \bar{v}_k, \mathcal{W}_{k,i})
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\hat{d}_k = \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{D}_{k,i}.$$

4. Шаг оценки выхода системы, фильтр оценки состояния

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{k,i} &= h(\mathcal{X}_{k,i}^{x,-}, u_k, \mathcal{X}_{k-1,i}^{v,+}, \hat{\theta}_k^-) \\ \hat{y}_k &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(m)} \mathcal{Y}_{k,i}. \end{aligned}$$

5. Подсчет коэффициента усиления Калмана L_k^x

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{y},k} &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{Y}_{k,i} - \hat{y}_k)(\mathcal{Y}_{k,i} - \hat{y}_k)^T \\ \Sigma_{\tilde{x}\tilde{z},k^-} &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{X}_{k,i}^{x,-} - \hat{x}_k^-)(\mathcal{Y}_{k,i} - \hat{y}_k)^T \\ L_k^x &= \Sigma_{\tilde{x}\tilde{y},k}^- \Sigma_{\tilde{y},k}^{-1}. \end{aligned}$$

6. Подсчет коэффициента усиления Калмана L_k^θ

$$\begin{aligned} \Sigma_{\tilde{d},k} &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{D}_{k,i} - \hat{d}_k)(\mathcal{D}_{k,i} - \hat{d}_k)^T \\ \Sigma_{\tilde{\theta}\tilde{d},k}^- &= \sum_{i=0}^p \alpha_i^{(c)} (\mathcal{W}_{k,i} - \hat{\theta}_k^-)(\mathcal{D}_{k,i} - \hat{d}_k)^T \\ L_k^\theta &= \Sigma_{\tilde{\theta}\tilde{d},k}^- \Sigma_{\tilde{d},k}^{-1}. \end{aligned}$$

7. Шаг оценки ковариационной матрицы состояния

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + L_k^x (y_k - \hat{y}_k) \\ \Sigma_{\tilde{x},k}^+ &= \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k^x \Sigma_{\tilde{y},k} (L_k^x)^T. \end{aligned}$$

8. Шаг оценки ковариационной матрицы параметров

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k^+ &= \hat{\theta}_k^- + L_k^\theta (y_k - \hat{d}_k) \\ \Sigma_{\tilde{\theta},k}^+ &= \Sigma_{\tilde{\theta},k}^- - L_k^\theta \Sigma_{\tilde{d},k} (L_k^\theta)^T. \end{aligned}$$

В данной главе был рассмотрен рекурсивный алгоритм – фильтр Калмана, а также две его модификации: Dual Extended Kalman Filter (DEKF) и Dual Sigma-Point Kalman Filter (DSPKF), позволяющие производить одновременную оценку как состояния системы, так и ее параметров. В дальнейшем будет продемонстрировано применение обоих подходов (DEKF и DSPKF) для оценки состояний литий-ионных ячеек.

5 Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов – это широко распространенный подход, используемый в регрессионном анализе для аппроксимации решения переопределенной системы, то есть системы, количество неизвестных которой существенно меньше количества уравнений. Термин «наименьшие квадраты» в названии метода используется, чтобы подчеркнуть факт минимизации результатом суммы квадратов остатков, полученных в качестве решения каждого отдельного уравнения.

Одним из часто встречающихся приложений метода наименьших квадратов является проблема приближения данных с помощью кривых. Здесь метод наименьших квадратов используется для минимизации суммы квадратов остатков, возникающих между наблюдаемым значением, полученным из реальной системы, и значением, рассчитанным с использованием модели.

Существующие методы наименьших квадратов принято разделять на две категории: линейных и нелинейных методов, в зависимости от линейности (нелинейности) остатков по всем неизвестным. В данной главе будут рассмотрены как линейные, так и нелинейные методы, так как их применение играет важную роль при анализе данных, полученных с ячеек в процессе их эксплуатации.

5.1 Weighted Ordinary Least Squares

Рассмотрим простейшую систему линейных алгебраических уравнений вида

$$y = Qx, \quad (29)$$

где x, y – известные переменные, а Q – неизвестная.

Самым распространенным методом регрессионного анализа является Ordinary Least Squares (OLS), в основе которого используется предположе-

ние, что независимая переменная x известна точно, а значения зависимой переменной y содержат шумы [37]. Таким образом, OLS позволяет найти решение Q системы вида

$$(y - \Delta y) = Qx,$$

используя точные значения переменной x и частично известные переменной y для минимизации расстояния между кривой приближения данных и точными значениями y . Далее под записью $y - \Delta y$ будем подразумевать смещение истинного значения переменной y на расстояние Δy , то есть, на величину погрешности измерения. Таким образом, y может быть представлен в виде

$$y = Qx + \Delta y.$$

Основная идея метода OLS представлена на Рис. 16, где ошибки измерения Δy изображены вертикальными линиями.

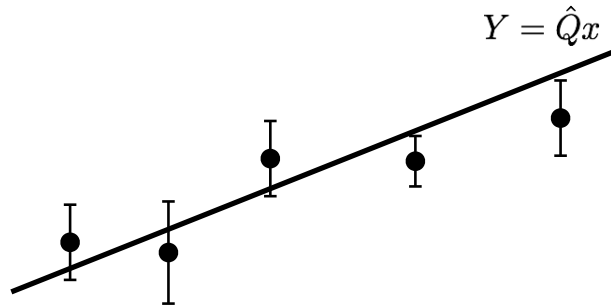


Рис. 16: Парадигма метода OLS

Далее сделаем предположение, что все отклонения Δy подчиняются гауссовскому распределению с известными значениями среднего и дисперсии: 0 и $\sigma_{y_i}^2$ соответственно.

OLS позволяет оценить значения \hat{Q}_n , используя n пар значений (x_i, y_i) , минимизирующих сумму квадратов отклонений Δy_i . Но в этой главе нами будет рассмотрен более общий подход для решения этой же задачи, известный в литературе как Weighted Ordinary Least Squares (WOLS). WOLS позволяет оценить значения переменной \hat{Q}_n , минимизируя взвешенную сумму квадратов отклонений

$$\chi_{WOLS}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - Y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{\sigma_{y_i}^2},$$

здесь целевая функция χ_{WOLS}^2 представляет собой χ^2 -распределение, так как является суммой независимых нормально-распределенных случайных величин, Y_i – точка на прямой $Y_i = \hat{Q}_n x_i$, соответствующая паре точек (x_i, y_i) (см. Рис. 16).

Простейшим способом минимизации целевой функции χ_{WOLS}^2 является ее дифференцирование по переменной \hat{Q}_n с дальнейшим приравнянием к нулю полученной производной

$$\frac{\partial \chi_{WOLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} = -2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i (y_i - \hat{Q}_n x_i)}{\sigma_{y_i}^2} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на -2 , разобьем на две суммы и разрешим полученную систему относительно \hat{Q}_n

$$\begin{aligned} \hat{Q}_n \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} \\ \hat{Q}_n &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} \bigg/ \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение две новых переменных $c_{1,n}$ и $c_{2,n}$

$$c_{1,n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}, \quad c_{2,n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2},$$

тогда, система для отыскания \hat{Q}_n может быть записана в форме

$$\hat{Q}_n = \frac{c_{2,n}}{c_{1,n}}.$$

Обе величины $c_{1,n}$ и $c_{2,n}$ могут быть вычислены рекурсивно следующим образом

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= c_{1,n-1} + x_n^2 / \sigma_{y_n}^2 \\ c_{2,n} &= c_{2,n-1} + x_n y_n / \sigma_{y_n}^2, \end{aligned}$$

что позволяет уменьшить требования к вычислительным возможностям системы и хранению данных при достаточных больших значениях n .

Усовершенствуем WOLS метод, добавив дополнительно *фактор забывания* $\gamma : 0 \ll \gamma \leq 1$ в целевую функцию

$$\chi_{FMWLS}^2 = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{\sigma_{y_i}^2},$$

тем самым сделав акцент на последних измерениях,

$$\chi_{FMWLS}^2 = \frac{(y_n - \hat{Q}_n x_n)^2}{\sigma_{y_n}^2} + \gamma \frac{(y_{n-1} - \hat{Q}_n x_{n-1})^2}{\sigma_{y_{n-1}}^2} + \gamma^2 \frac{(y_{n-2} - \hat{Q}_n x_{n-2})^2}{\sigma_{y_{n-2}}^2} + \dots.$$

Таким образом, решение рассматриваемой системы $y = Qx$ принимает вид

$$\hat{Q}_n = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} \bigg/ \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}.$$

По аналогии с WOLS методом введем дополнительные переменные $\tilde{c}_{1,n}$ и $\tilde{c}_{2,n}$ для перехода к рекурсивному алгоритму, позволяющему уменьшить вычислительные затраты

$$\tilde{c}_{1,n} = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2}, \quad \tilde{c}_{2,n} = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2},$$

тогда

$$\hat{Q}_n = \tilde{c}_{2,n} / \tilde{c}_{1,n}$$

$$\tilde{c}_{1,n} = \gamma \tilde{c}_{1,n-1} + x_n^2 / \sigma_{y_n}^2$$

$$\tilde{c}_{2,n} = \gamma \tilde{c}_{2,n-1} + x_n y_n / \sigma_{y_n}^2.$$

Полученный алгоритм обладает следующими важными достоинствами:

1. Решение линейной системы (\hat{Q}_n) вычисляется с использованием простейших математических операций (умножение, деление, сложение);
2. Решение линейной системы вычисляется рекурсивным способом, что позволяет уменьшить вычислительные затраты;
3. Фактор забывания позволяет получить решение, адаптируемое к изменениям в измеряемых сигналах.

5.2 Weighted Total Least Squares

Метод Weighted Total Least Squares (WTLS) при отыскании решения СЛАУ учитывает ошибки измерений в обоих рассматриваемых сигналах x и y (см. Рис. 17), то есть используется для решения системы вида

$$(y - \Delta y) = Q(x - \Delta x),$$

где Δx и Δy – ошибки измерений x и y соответственно, имеющие нулевые математические ожидания и дисперсии $\sigma_{x_i}^2$ и $\sigma_{y_i}^2$ [37]. В основе алгоритма WTLS лежит идея минимизации взвешенной суммы вида

$$\chi_{WTLS}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - X_i)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(y_i - Y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2},$$

где (X_i, Y_i) – точка на прямой $Y = \hat{Q}X$, соответствующая (x_i, y_i) .

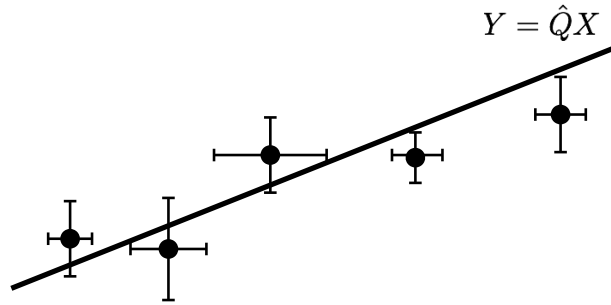


Рис. 17: Парадигма метода TLS

Так же как и при рассмотрении метода WOLS, продифференцируем целевую функцию по переменной \hat{Q}_n , для решения этой задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа, основные шаги которого рассмотрим далее.

1. Добавим множители Лагранжа в целевую функцию

$$\chi_{WTLS,a}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - X_i)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(y_i - Y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} - \lambda_i(Y_i - \hat{Q}_n X_i). \quad (30)$$

2. Продифференцируем (30) по λ_i и приравняем получившийся результат к нулю

$$\frac{\partial \chi_{WTLS,a}^2}{\partial \lambda_i} = -(Y_i - \hat{Q}_n X_i) = 0$$

$$Y_i = \hat{Q}_n X_i.$$

3. Продифференцируем (30) по переменной Y_i , получив выражение для нахождения множителей Лагранжа λ_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{WTLS,a}^2}{\partial Y_i} &= \frac{-2(y_i - Y_i)}{\sigma_{y_i}^2} - \lambda_i = 0 \\ \lambda_i &= \frac{-2(y_i - Y_i)}{\sigma_{y_i}^2}. \end{aligned}$$

4. Продифференцируем (30) по переменной X_i

$$\frac{\partial \chi_{WTLS,a}^2}{\partial Y_i} = \frac{-2(x_i - X_i)}{\sigma_{x_i}^2} + \lambda_i \hat{Q}_n = 0.$$

5. Подставим получившийся результат в целевую функцию χ_{WTLS}^2

$$\begin{aligned} \chi_{WTLS}^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - X_i)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{(y_i - Y_i)^2}{\sigma_{y_i}^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\left(x_i - \frac{x_i \sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n y_i \sigma_{x_i}^2}{\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2} \right)^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{\left(y_i - \hat{Q}_n \frac{x_i \sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n y_i \sigma_{x_i}^2}{\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2} \right)^2}{\sigma_{y_i}^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\left(x_i \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right) - \left(x_i \sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n y_i \sigma_{x_i}^2 \right) \right)^2}{\sigma_{x_i}^2 \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right)^2} + \\ &\quad \frac{\left(y_i \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right) - \left(x_i \sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n y_i \sigma_{x_i}^2 \right) \right)^2}{\sigma_{y_i}^2 \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right)^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^4 \left(y_i - \hat{Q}_n x_i \right)^2}{\sigma_{x_i}^2 \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right)^2} + \frac{\sigma_{y_i}^4 \left(y_i - \hat{Q}_n x_i \right)^2}{\sigma_{y_i}^2 \left(\sigma_{y_i}^2 + \hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 \right)^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{\hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2}.$$

Продифференцируем получившееся выражение по переменной \hat{Q}_n и приравняем результат к нулю для решения поставленной ранее задачи минимизации

$$\frac{\partial \chi_{WTLs}^2}{\partial \hat{Q}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{2(\hat{Q}_n x_i - y_i)(\hat{Q}_n y_i \sigma_{x_i}^2 + x_i \sigma_{y_i}^2)}{(\hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2)^2} = 0. \quad (31)$$

К сожалению, полученный алгоритм обладает рядом существенных недостатков:

1. Решение \hat{Q}_n может быть найдено только численно, например, с использованием метода Ньютона (глобальный минимум существует в силу выпуклости целевой функции χ_{WTLs}^2), для этого при обновлении векторов x и y потребуется итеративно вычислять значения выражения

$$\hat{Q}_{n,k} = \hat{Q}_{n,k-1} - \frac{\partial \chi_{WTLs}^2 / \partial \hat{Q}_{n,k-1}}{\partial^2 \chi_{WTLs}^2 / \partial \hat{Q}_{n,k-1}^2}, \quad (32)$$

где числитель – Якобиан целевой функции χ_{WTLs}^2 , суть формула (31), знаменатель – Гессиан, вычисляющийся с использованием известных величин

$$\frac{\partial^2 \chi_{WTLs}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_{y_i}^4 x_i^2 + \sigma_{x_i}^4 (3\hat{Q}_n^2 y_i^2 - 2\hat{Q}_n^3 x_i y_i)}{(\hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2)^3} - \frac{\sigma_{x_i}^2 \sigma_{y_i}^2 (3\hat{Q}_n^2 x_i^2 - 6\hat{Q}_n x_i y_i + y_i^2)}{(\hat{Q}_n^2 \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2)^3} \right).$$

2. Шаги алгоритма не могут быть вычислены рекурсивно, что делает невозможным его использование во встраиваемых системах реального времени.

5.3 Статистический критерий

Рассмотрим подробнее целевые функции введенных в предыдущих параграфах алгоритмов:

1. χ^2_{WLS} – χ^2 -случайная величина с $n - 1$ степенью свободы: n точек y_i используются для ее создания и одна степень утрачивается при вычислении \hat{Q}_n .
2. χ^2_{WTLs} – χ^2 -случайная величина с $2n - 1$ степенью свободы: n точек y_i и n точек x_i используются для ее создания и одна степень утрачивается при вычислении \hat{Q}_n .

Покажем, что знание вида распределения и количества степеней свободы целевой функции может быть использовано для оценки качества и надежности рассмотренных ранее алгоритмов.

Введем в рассмотрение функцию $P(\chi^2|\nu)$ – вероятность, что наблюдаемые значения χ^2 корректной модели не превосходят вычисляемых значений χ^2 с ν степенями свободы. Рассмотрим $Q(\chi^2|\nu) = 1 - P(\chi^2|\nu)$ – вероятность, что наблюдаемые значения превосходят вычисляемые значения даже в случае корректной модели. Таким образом, для оценки качества введенных в предыдущих параграфах алгоритмов будем использовать следующий статистический критерий

$$Q(\chi^2|\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \int_{\chi^2/2}^{\infty} e^{-t} t^{\nu/2-1} dt. \quad (33)$$

Если значения величины $Q(\chi^2|\nu)$ малы для некоторых χ^2 и степеней свободы ν , тогда рассматриваемая модель отклоняется и считается неверной. В случае, если гипотетическая модель совпадает с наблюдаемой, значения $Q(\chi^2|\nu)$ стремятся к единице.

5.4 Доверительный интервал

При оценке величины \hat{Q}_n важно уметь определять уровень надежности полученного результата, то есть находить интервал $(\hat{Q}_n - 3\sigma_{\hat{Q}_n}, \hat{Q}_n + 3\sigma_{\hat{Q}_n})$, в пределах которого должны быть расположены истинные значения Q . Для этого, сведем рассматриваемую ранее задачу метода наименьших квадратов к методу максимального правдоподобия. Введем векторы \mathbf{x} и \mathbf{y} , содержащие элементы x_i и y_i соответственно, и диагональную матрицу $\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}$, на диагонали которой расположены $\sigma_{y_i}^2$. Таким образом, минимизация функции χ_{WLS}^2 эквивалентна максимизации многомерной гауссовской функции плотности вероятности

$$\begin{aligned} ML_{WLS} &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{y} - \hat{Q}_n \mathbf{x})^T \Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}^{-1} (\mathbf{y} - \hat{Q}_n \mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Sigma_{\tilde{\mathbf{y}}}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \chi_{WLS}^2 \right). \end{aligned}$$

Аналогично, рассмотрим вектор \mathbf{d} , содержащий \mathbf{y} и \mathbf{x} , вектор $\hat{\mathbf{d}}$, состоящий из элементов Y_i и X_i , матрицу $\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}}$, на диагонали которой стоят последовательно элементы $\sigma_{y_i}^2$ и $\sigma_{x_i}^2$, тем самым сведя задачу минимизации функции χ_{WTLs}^2 к максимизации функции

$$\begin{aligned} ML_{WTLs} &= \frac{1}{(2\pi)^n |\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}})^T \Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}}^{-1} (\mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}) \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n |\Sigma_{\tilde{\mathbf{d}}}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \chi_{WTLs}^2 \right). \end{aligned}$$

Введенные целевые функции ML_{WLS} и ML_{WTLs} позволяют воспользоваться неравенством Крамера-Рао для вывода доверительных интервалов оценки значения \hat{Q}_n с использованием методов WLS и WTLs

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{Q}_n}^2 &\geq 2 \left(\frac{\partial^2 \chi_{WLS}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} \right) \\ \sigma_{\hat{Q}_n}^2 &\geq 2 \left(\frac{\partial^2 \chi_{WTLs}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} \right). \end{aligned}$$

5.5 Упрощения метода Weighted Total Least Squares

В данном параграфе рассмотрим некоторые подходы к упрощению метода WTLS для возможности дальнейшего его использования во встраиваемых системах.

5.5.1 Proportional Total Least Squares

В основе метода Proportional Total Least Squares (PTLS) лежит предположение, что погрешности обоих наблюдаемых сигналов x_i и y_i пропорциональны друг другу для всех i , тогда $\sigma_{x_i} = k\sigma_{y_i}$ при всех значениях i [37]. Подставим соотношение дисперсий в целевую функцию χ_{WTLS}^2 , получив новую целевую функцию χ_{PTLS}^2

$$\chi_{PTLS}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - X_i}{k^2 \sigma_{y_i}^2} + \frac{y_i - Y_i}{\sigma_{y_i}^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1) \sigma_{y_i}^2}.$$

Якобиан функции χ_{PTLS}^2 имеет вид (получается из Якобиана χ_{WTLS}^2 после подстановки $\sigma_{x_i} = k\sigma_{y_i}$)

$$\frac{\partial \chi_{PTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{Q}_n x_i - y_i)(\hat{Q}_n k^2 y_i + x_i)}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^2 \sigma_{y_i}^2}.$$

Приравняем получившееся выражение к нулю для решения задачи минимизации, то есть поиска значения \hat{Q}_n

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{PTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{Q}_n x_i - y_i)(\hat{Q}_n k^2 y_i + x_i)}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^2 \sigma_{y_i}^2} \\ &= \hat{Q}_n^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n k^2 \frac{x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}_{a=k^2 c_{2,n}} + \hat{Q}_n \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - k^2 y_i^2}{\sigma_{y_i}^2}}_{b=c_{1,n} - k^2 c_{3,n}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{-x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2}}_{c=-c_{2,n}} \\ &= a\hat{Q}_n^2 + b\hat{Q}_n + c = 0. \end{aligned}$$

Разрешим получившееся квадратное уравнение относительно \hat{Q}_n

$$\hat{Q}_n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(c_{1,n} - k^2 c_{3,n}) \pm \sqrt{(c_{1,n} - k^2 c_{3,n})^2 + 4k^2 c_{2,n}^2}}{2k^2 c_{2,n}}.$$

Покажем, используя критерий Рауса-Гурвица, что получившееся квадратное уравнение всегда имеет один положительный и один отрицательный корни. То есть вычислим, сколько раз изменяется знак элементов левого столбца при переходе от строки к строке в матрице Рауса-Гурвица. Согласно критерию, количество корней, лежащих в правой комплексной полуплоскости, равняется числу раз смены знака элементов левого столбца матрицы.

Построим матрицу Рауса-Гурвица

$$\begin{array}{c|cc} \hat{Q}_n^2 & k^2 c_{2,n} & -c_{2,n} \\ \hat{Q}_n^1 & c_{1,n} - k^2 c_{3,n} & 0 \\ \hat{Q}_n^0 & -c_{2,n} & 0 \end{array}$$

Рассмотрим первый элемент левого столбца $k^2 c_{2,n}$, он принимает только положительные значения, в силу положительности обоих множителей. Аналогично, последний элемент $-c_{2,n}$ может быть только отрицательным. Независимо от знака среднего элемента $c_{1,n} - k^2 c_{3,n}$, мы имеем единовременную смену знака в столбце, то есть один корень в правой полуплоскости.

Таким образом, решением рассматриваемого квадратного уравнения являются два корня, один из которых расположен в правой полуплоскости, другой – в левой или на мнимой оси. Согласно основной теореме алгебры, если все коэффициенты полинома $c_{1,n}, c_{2,n}, c_{3,n}$ вещественны, то оба корня также должны быть вещественны или комплексно-сопряжены. Получившиеся корни не являются комплексно-сопряженными, поскольку они расположены в разных полуплоскостях. Выбирая наибольший из корней, получим требуемое.

Таким образом, значения \hat{Q}_n могут быть вычислены рекурсивно с использованием PTLS метода следующим образом

$$\hat{Q}_n = \frac{-c_{1,n} + k^2 c_{3,n} + \sqrt{(c_{1,n} - k^2 c_{3,n})^2 + 4k^2 c_{2,n}^2}}{2k^2 c_{2,n}},$$

где

$$\begin{aligned}c_{1,n} &= c_{1,n-1} + x_n^2/\sigma_{y_i}^2 \\c_{2,n} &= c_{2,n-1} + x_n y_n/\sigma_{y_i}^2 \\c_{3,n} &= c_{3,n-1} + y_n^2/\sigma_{y_i}^2.\end{aligned}$$

Границы доверительного интервала

$$\sigma_{\hat{Q}_n} = \sqrt{2/(\partial^2 \chi_{PTLS}^2 / \partial \hat{Q}_n^2)},$$

где Гессиан может быть вычислен рекурсивно

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \chi_{PTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} &= \frac{(-4k^2 c_2) \hat{Q}_n^3 + 6k^4 c_3 \hat{Q}_n^2}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^3} \\&\quad + \frac{(-6c_1 + 12c_2)k^2 \hat{Q}_n + 2(c_1 - k^2 c_3)}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^3}.\end{aligned}$$

Для адаптации предсказания в алгоритм PTLIS вводится фактор забывания следующим образом

$$\hat{Q}_n = \frac{-\tilde{c}_{1,n} + k^2 \tilde{c}_{3,n} + \sqrt{(\tilde{c}_{1,n} - k^2 \tilde{c}_{3,n})^2 + 4k^2 \tilde{c}_{2,n}^2}}{2k^2 \tilde{c}_{2,n}},$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{c}_{1,n} &= \gamma \tilde{c}_{1,n-1} + x_n^2/\sigma_{y_i}^2 \\ \tilde{c}_{2,n} &= \gamma \tilde{c}_{2,n-1} + x_n y_n/\sigma_{y_i}^2 \\ \tilde{c}_{3,n} &= \gamma \tilde{c}_{3,n-1} + y_n^2/\sigma_{y_i}^2.\end{aligned}$$

Целевая функция, границы доверительного интервала и Гессиан имеют вид

$$\begin{aligned}\chi_{FMPTLS}^2 &= \frac{\tilde{c}_{1,n} \hat{Q}_n^2 - 2\tilde{c}_{2,n} \hat{Q}_n + \tilde{c}_{3,n}}{\hat{Q}_n^2 k^2 + 1} \\ \sigma_{\hat{Q}_n} &= \sqrt{2/(\partial^2 \chi_{FMPTLS}^2 / \partial \hat{Q}_n^2)} \\ \frac{\partial^2 \chi_{FMPTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} &= \frac{(-4k^2 \tilde{c}_2) \hat{Q}_n^3 + 6k^4 \tilde{c}_3 \hat{Q}_n^2}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^3} \\ &\quad + \frac{(-6\tilde{c}_1 + 12\tilde{c}_2)k^2 \hat{Q}_n + 2(\tilde{c}_1 - k^2 \tilde{c}_3)}{(\hat{Q}_n^2 k^2 + 1)^3}.\end{aligned}\tag{34}$$

PTLS обладает следующими достоинствами, унаследованными им от метода WLS:

1. Решение линейной системы (\hat{Q}_n) вычисляется с использованием простейших математических операций (умножение, деление, сложение);
2. Решение линейной системы вычисляется рекурсивным способом, что позволяет уменьшить вычислительные затраты;
3. Фактор забывания позволяет получить решение, адаптируемое к изменениям в измеряемых сигналах.

Однако допущение о пропорциональности дисперсий измеряемых сигналов ($\sigma_{x_i}^2 = k\sigma_{y_i}^2$), сделанное нами при выводе метода PTLS, будет удовлетворяться не всегда в силу погрешностей датчиков.

5.5.2 Approximate Weighted Total Least Squares

Рассмотрим метод, позволяющий найти решение \hat{Q}_n и при этом не требующий пропорциональности погрешностей σ_{x_i} и σ_{y_i} . Также потребуем, чтобы новый метод допускал реализацию во встраиваемых системах.

Рассмотрим геометрическое представление WTLS метода (Рис. 18 (а)). Ранее в параграфе 5.2 было показано, что WTLS позволяет отыскать (X_i, Y_i) на прямой $Y_i = \hat{Q}_n X_i$ для каждой измеренной пары точек (x_i, y_i) и произвольных погрешностей $\sigma_{x_i}^2$ и $\sigma_{y_i}^2$. Пунктирная линия соединяет каждую точку (x_i, y_i) с парой (X_i, Y_i) на прямой $Y_i = \hat{Q}_n X_i$ (см. Рис. 18 (а)). Также расстояние между точками x_i и X_i не обязательно равно расстоянию между парой точек y_i и Y_i . Таким образом, если качество измерения x_i лучше (хуже) качества измерения y_i , то расстояние до координаты X_i должно быть короче (длиннее), чем расстояние от y_i до Y_i .

Геометрическая интерпретация метода PTLS представлена на Рис. 18 (б), здесь предполагается, что $\sigma_{x_i}^2$ и $\sigma_{y_i}^2$ пропорциональны друг другу. Таким

образом, расстояние между x_i и X_i равняется расстоянию между y_i и Y_i , а пунктирная линия, соединяющая точки (x_i, y_i) и (X_i, Y_i) перпендикулярна линии $Y_i = \hat{Q}_n X_i$. Если σ_{x_i} и σ_{y_i} не равны друг другу, но пропорциональны, тогда любая из осей x или y может быть отмасштабирована для получения равных дисперсий измерений.

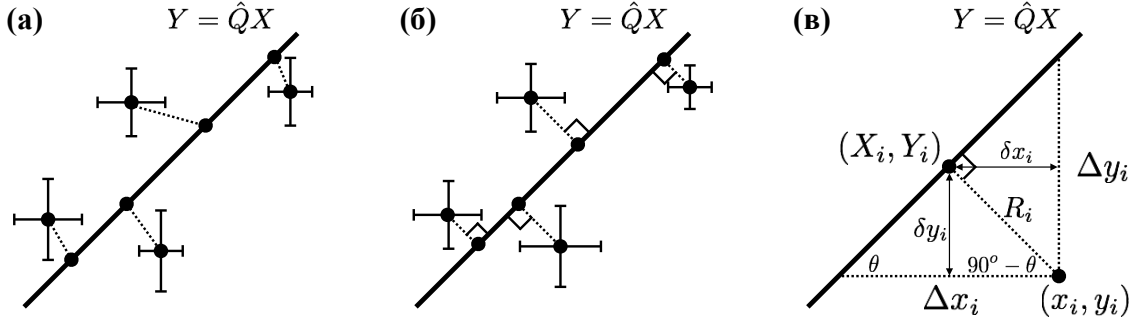


Рис. 18: Геометрическое представление методов (а) WTLS (б) PTLS (в) AWTLS

Рассмотрим геометрическое представление метода Approximate Weighted Total Least Squares (AWTLS), Рис. 18 (в) [37]. Так же как и при выводе метода PTLS, потребуем, чтобы пунктирная линия, соединяющая (x_i, y_i) и (X_i, Y_i) , была перпендикулярна прямой $Y_i = \hat{Q}_n X_i$, что позволяет получить решение рекурсивно. Однако будем считать, что расстояние между точками x_i и X_i не равно расстоянию между точками y_i и Y_i , то есть, сделаем такое же предположение, как и при рассмотрении метода WTLS.

Обозначим Δx_i – расстояние между точкой x_i и прямой $Y_i = \hat{Q}_n X_i$, Δy_i – расстояние между точкой y_i и прямой $Y_i = \hat{Q}_n X_i$ для всех i . Таким образом, наклон прямой – $\hat{Q}_n = \Delta y_i / \Delta x_i$, откуда следует, что угол наклона прямой $\theta = \tan^{-1} \hat{Q}_n$. Кратчайшее расстояние между точкой (x_i, y_i) и линией $Y_i = \hat{Q}_n X_i$

$$R_i = \Delta y_i \cos \theta = \frac{\Delta y_i}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\Delta y_i}{\sqrt{1 + \hat{Q}_n^2}}.$$

Пусть далее $\delta x_i = R_i \sin \theta$, $\delta y_i = R_i \cos \theta - y$ и y (Рис. 18 (в)), что позволяет

получить целевую функцию метода AWTLS

$$\chi_{AWTLS}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\delta x_i^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{\delta y_i^2}{\sigma_{y_i}^2}.$$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = \frac{\hat{Q}_n^2}{1 + \hat{Q}_n^2},$$

что приводит к следующим равенствам

$$\begin{aligned} \delta x_i^2 &= \left(\frac{\Delta y_i^2}{1 + \hat{Q}_n^2} \right) \left(\frac{\hat{Q}_n^2}{1 + \hat{Q}_n^2} \right) \\ \delta y_i^2 &= \left(\frac{\Delta y_i^2}{1 + \hat{Q}_n^2} \right) \left(\frac{1}{1 + \hat{Q}_n^2} \right). \end{aligned}$$

Так как $\Delta y_i = y_i - \hat{Q}_n x_i$, целевая функция может быть записана в следующем виде

$$\chi_{AWTLS}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{(1 + \hat{Q}_n^2)^2} \left(\frac{\hat{Q}_n^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \right).$$

Отметим, что целевые функции методов AWTLS и WTLS совпадают в случае равных отклонений, то есть в случае, если $\sigma_{x_i} = \sigma_{y_i}$. Если же $\sigma_{x_i} = k\sigma_{y_i}$, в рассмотрение вводится дополнительная переменная $\tilde{y}_i = ky_i$, что приводит к равенству $\sigma_{\tilde{y}_i} = \sigma_{x_i}$.

Минимизируем целевую функцию AWTLS для отыскания оптимального решения. Якобиан целевой функции метода AWTLS имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{AWTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} &= \frac{2}{(\hat{Q}_n^2 + 1)^3} \sum_{i=1}^n \hat{Q}_n^4 \left(\frac{x_i y_i}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \hat{Q}_n^3 \left(\frac{2x_i^2}{\sigma_{x_i}^2} - \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \frac{y_i^2}{\sigma_{x_i}^2} \right) \\ &+ \hat{Q}_n^2 \left(\frac{3x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} - \frac{3x_i y_i}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \hat{Q}_n \left(\frac{x_i^2 - 2y_i^2}{\sigma_{y_i}^2} + \frac{y_i^2}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \left(\frac{-x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} \right). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение дополнительные переменные

$$c_{4,n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\sigma_{x_i}^2}, \quad c_{5,n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\sigma_{x_i}^2}, \quad c_{6,n} = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\sigma_{x_i}^2},$$

что позволяет записать Якобиан целевой функции в виде

$$\frac{\partial \chi_{AWTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} = \frac{2}{(\hat{Q}_n^2 + 1)^3} \left(c_5 \hat{Q}_n^4 + (2c_4 - c_1 - c_6) \hat{Q}_n^3 + (3c_2 - 3c_5) \hat{Q}_n^2 + (c_1 - 2c_3 + c_6) \hat{Q}_n - c_2 \right),$$

где переменные $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ вычисляются рекурсивно следующим образом

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= c_{1,n-1} + x_n^2 / \sigma_{y_n}^2, & c_{4,n} &= c_{4,n-1} + x_n^2 / \sigma_{x_n}^2, \\ c_{2,n} &= c_{2,n-1} + x_n y_n / \sigma_{y_n}^2, & c_{5,n} &= c_{5,n-1} + x_n y_n / \sigma_{x_n}^2, \\ c_{3,n} &= c_{3,n-1} + y_n^2 / \sigma_{y_n}^2, & c_{6,n} &= c_{6,n-1} + y_n^2 / \sigma_{x_n}^2. \end{aligned}$$

Приравняем к нулю Якобиан целевой функции с целью решения задачи минимизации

$$c_5 \hat{Q}_n^4 + (2c_4 - c_1 - c_6) \hat{Q}_n^3 + (3c_2 - 3c_5) \hat{Q}_n^2 + (c_1 - 2c_3 + c_6) \hat{Q}_n - c_2 = 0. \quad (35)$$

Все корни данного уравнения должны быть рассмотрены для отыскания оптимального решения \hat{Q}_n . Для решения этой задачи необходимо построить сопровождающую матрицу полинома (35) [19]

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 & -(c_1 - 2c_3 + c_6) \\ 0 & 1 & 0 & -(3c_2 - 3c_5) \\ 0 & 0 & 1 & -(2c_4 - c_1 - c_6) \end{bmatrix}$$

и отыскать все ее собственные значения. Известно, что собственные числа могут принимать комплексные, отрицательные и положительные значения. Исключим из рассмотрения комплексные и отрицательные значения, так как они не могут являться решением поставленной задачи отыскания корней линейной системы, а все положительные корни подставим в целевую функцию χ_{AWTLS}^2

$$\chi_{AWTLS}^2 = \frac{1}{(\hat{Q}_n + 1)^2} \left(c_4 \hat{Q}_n^4 - 2c_5 \hat{Q}_n^3 + (c_1 + c_6) \hat{Q}_n^2 - 2c_2 \hat{Q}_n + c_3 \right),$$

вычислим ее значения и выберем минимальное.

Отыскание границ доверительного интервала требует знания Гессиа-на целевой функции χ_{AWTLS}^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{AWTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} = \frac{2}{(\hat{Q}_n^2 + 1)^4} & \left(-2c_5 \hat{Q}_n^5 + (3c_1 - 6c_4 + 3c_6) \hat{Q}_n^4 \right. \\ & + (-12c_2 + 16c_5) \hat{Q}_n^3 + (-8c_1 + 10c_3 + 6c_4 - 8c_6) \hat{Q}_n^2 \\ & \left. + (12c_2 - 6c_5) \hat{Q}_n + (c_1 - 2c_3 + c_6) \right). \end{aligned}$$

Фактор забывания для метода AWTLS вводится так же, как и во всех предыдущих случаях.

Целевая функция принимает вид

$$\chi_{FMAWTLS}^2 = \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} \frac{(y_i - \hat{Q}_n x_i)^2}{(1 + \hat{Q}_n)^2} \left(\frac{\hat{Q}_n^2}{\sigma_{x_i}^2} + \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \right).$$

Якобиан

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{AWTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} = \frac{2}{(\hat{Q}_n + 1)^3} \sum_{i=1}^n \gamma^{n-i} & \left[\hat{Q}_n^4 \left(\frac{x_i y_i}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \hat{Q}_n^3 \left(\frac{2x_i^2}{\sigma_{x_i}^2} - \frac{x_i^2}{\sigma_{y_i}^2} - \frac{y_i^2}{\sigma_{x_i}^2} \right) \right. \\ & \left. + \hat{Q}_n^2 \left(\frac{3x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} - \frac{3x_i y_i}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \hat{Q}_n \left(\frac{x_i^2 - 2y_i^2}{\sigma_{y_i}^2} + \frac{y_i^2}{\sigma_{x_i}^2} \right) + \left(\frac{-x_i y_i}{\sigma_{y_i}^2} \right) \right], \end{aligned}$$

который может быть вычислен рекурсивно как

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_{AWTLS}^2}{\partial \hat{Q}_n} = \frac{2}{(\hat{Q}_n + 1)^3} & \left(\tilde{c}_5 \hat{Q}_n^4 + (-\tilde{c}_1 + 2\tilde{c}_4 - \tilde{c}_6) \hat{Q}_n^3 \right. \\ & \left. + (3\tilde{c}_2 - 3\tilde{c}_5) \hat{Q}_n^2 + (\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_3 + \tilde{c}_6) \hat{Q}_n - \tilde{c}_2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{1,n} &= \tilde{c}_{1,n-1} + x_n^2 / \sigma_{y_n}^2, & \tilde{c}_{4,n} &= \tilde{c}_{4,n-1} + x_n^2 / \sigma_{x_n}^2, \\ \tilde{c}_{2,n} &= \tilde{c}_{2,n-1} + x_n y_n / \sigma_{y_n}^2, & \tilde{c}_{5,n} &= \tilde{c}_{5,n-1} + x_n y_n / \sigma_{x_n}^2, \\ \tilde{c}_{3,n} &= \tilde{c}_{3,n-1} + y_n^2 / \sigma_{y_n}^2, & \tilde{c}_{6,n} &= \tilde{c}_{6,n-1} + y_n^2 / \sigma_{x_n}^2. \end{aligned}$$

Положительные корни уравнения

$$\tilde{c}_5 \hat{Q}_n^4 + (2\tilde{c}_4 - \tilde{c}_1 - \tilde{c}_6) \hat{Q}_n^3 + (3\tilde{c}_2 - 3\tilde{c}_5) \hat{Q}_n^2 + (\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_3 + \tilde{c}_6) \hat{Q}_n - \tilde{c}_2 = 0$$

должны быть рассмотрены для отыскания минимума целевой функции

$$\chi_{FMAWTL S}^2 = \frac{1}{(\hat{Q}_n + 1)^2} \left(\tilde{c}_4 \hat{Q}_n^4 - 2\tilde{c}_5 \hat{Q}_n^3 + (\tilde{c}_1 + \tilde{c}_6) \hat{Q}_n^2 - 2\tilde{c}_2 \hat{Q}_n + \tilde{c}_3 \right).$$

Границы доверительного интервала вычисляются с использованием Гессии-ана вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \chi_{FMAWTL S}^2}{\partial \hat{Q}_n^2} = \frac{2}{(\hat{Q}_n^2 + 1)^4} & \left(-2\tilde{c}_5 \hat{Q}_n^5 + (3\tilde{c}_1 - 6\tilde{c}_4 + 3\tilde{c}_6) \hat{Q}_n^4 \right. \\ & + (-12\tilde{c}_2 + 16\tilde{c}_5) \hat{Q}_n^3 + (-8\tilde{c}_1 + 10\tilde{c}_3 + 6\tilde{c}_4 - 8\tilde{c}_6) \hat{Q}_n^2 \\ & \left. + (12\tilde{c}_2 - 6\tilde{c}_5) \hat{Q}_n + (\tilde{c}_1 - 2\tilde{c}_3 + \tilde{c}_6) \right). \end{aligned} \quad (36)$$

В текущей главе были рассмотрены различные методы наименьших квадратов: Weighted Ordinary Least Squares и Weighted Total Least Squares, а также их рекурсивные модификации: Proportional Total Least Squares и Approximate Weighted Total Least Squares, позволяющие реализацию алгоритмов во встраиваемых системах. В следующей главе покажем применение данных методов для получения оценки текущей емкости батареи.

6 Мониторинг накопителей

В главах 4 и 5 нами были подробно изучены основные шаги алгоритмов, лежащих в основе методов, позволяющих выполнить оценку состояния заряда, внутреннего сопротивления и емкости аккумулятора. В данной главе мы рассмотрим применение обозначенных выше подходов и метода эквивалентной цепи (см. главу 2) к данным, получаемым с реальных накопителей энергии.

6.1 Экспериментальные данные

Для сравнения результатов и доказательства применимости подходов, в основе которых лежат фильтр Калмана и метод наименьших квадратов, в данной работе были использованы данные с накопителей различных химий и емкостей. Однако не все данные в дальнейшем будут представлены на графиках в силу налагаемых на них прав интеллектуальной собственности. Описание использованных в работе данных и степень их доступности приведены в таблице 2, графики основных измерений представлены на Рис. 19 – 23.

6.2 Оборудование и программное обеспечение

Для проведения экспериментов, необходимых для выполнения сравнительного анализа алгоритмов мониторинга накопителей, был использован ПК с процессором Intel Core i5 (1.6 GHz) и оперативной памятью 4 Гб 1600 MHz DDR3. Прототипирование алгоритмов осуществлялось в среде MATLAB.

6.3 Метод эквивалентной цепи и Dual Kalman Filter

Механизмы старения, протекающие внутри литий-ионных ячеек, были подробно изучены в главе 3. В данном параграфе нашей основной задачей

является получение оценки состояния заряда и состояния «здоровья» батареи, в контексте оценки внутреннего сопротивления, в реальном времени.

Не существует прибора, позволяющего измерить значения состояния заряда или внутреннего сопротивления напрямую с батареи. Однако в режиме реального времени у пользователя имеется возможность произвести измерения сигналов тока, напряжения и температуры, поэтому при выборе алгоритма будем опираться на данную информацию.

Убедимся, что сигналов тока и напряжения достаточно для оценки как состояния заряда, так и внутреннего сопротивления.

SS-система (9):

$$\begin{aligned} z[k+1] &= z[k] - \frac{\Delta t}{Q} \eta[k] i[k] \\ i_{R_1}[k+1] &= \sum_j \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_j C_j}\right) i_{R_j}[k] + \sum_j \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_j C_j}\right)\right) i[k] \\ v[k] &= OCV(z[k]) - \sum_j R_j i_{R_j}[k] - R_0 i[k]. \end{aligned}$$

связывает измеряемые сигналы и состояние батареи. Отсюда следует, что в случае отсутствия шумов в сигналах тока и напряжения, мы можем получить оценку состояния заряда.

Покажем, что измеряемых сигналов достаточно для оценки внутреннего сопротивления. Рассмотрим уравнение наблюдения в системе (9)

$$v_k = OCV(z_k) - \sum_j R_j i_{R_j,k} - R_0 i_k.$$

Пусть $S_{v_k}^{R_0}$ – чувствительность измерения напряжения к изменению внутреннего сопротивления, определяемая как

$$S_{v_k}^{R_0} = \frac{R_0}{v_k} \frac{dv_k}{dR_0} = -\frac{R_0}{v_k} i_k.$$

Порядок величины внутреннего сопротивления ячейки, как правило, измеряется в милли Омах, а ее напряжение – в единицах Вольт, в то время

как величина тока может достигать десятков Ампер. Из этого следует, что абсолютное значение чувствительности $S_{v_k}^{R_0}$ достигает величины порядка 0.01.

Отсюда можно сделать вывод, что для того, чтобы оценить внутреннее сопротивление ячейки, достаточно использовать сигнал напряжения.

Таким образом, метод оценки состояния заряда и внутреннего сопротивления, основанный на использовании Dual Kalman Filter, является обоснованным, так как он обеспечивает высокое качество оценки величин, представляющих пользовательский интерес, связывая модель системы с измеряемыми зашумленными сигналами.

Группу алгоритмов Dual Kalman Filter составляют методы DEKF (параграф 4.8.1) и DSPKF (параграф 4.8.2). Их реализация для оценки состояния заряда и внутреннего сопротивления батареи требует знания входных величин, полученных заранее с накопителя, и определенной частоты дискретизации данных.

В основе рассматриваемых алгоритмов лежит динамическая SS-модель системы батареи, а внутренние электрохимические процессы ячейки развиваются достаточно медленно, поэтому поступление точек измеряемых сигналов (ток, напряжение) на вход методов должно происходить с частотой дискретизации не меньше 1 Гц. Данное требование обуславливается тем, что большая частота дискретизации данных может привести к потерям в описании динамики батареи.

Уравнение наблюдения SS-системы батареи (9) включает в себя напряжение разомкнутой цепи. Ранее в параграфе 2.2, было отмечено, что данная величина определяется эмпирически. Кроме того, поведение кривой напряжения разомкнутой цепи отличается для различных химий аккумуляторов. Так как для реализации алгоритмов DEKF и DSPKF требуется использование SS-модели батареи, то необходимо и знание значений кривой напряжения разомкнутой цепи.

6.3.1 Обеспечение сходимости Dual Kalman Filter

Dual Kalman Filter позволяет получить оценку состояния системы \hat{x}_k^+ и ее параметров $\hat{\theta}_k^+$ так, что результат вычисления входа и выхода системы фильтром соответствует измеряемым значениям входа и выхода, то есть, тока и напряжения соответственно. Однако это не является гарантией, что полученные оценки состояния и параметров системы сойдутся к значениям, имеющим физический смысл.

Для обеспечения сходимости Dual Kalman Filter для оценки состояний и параметров модели (9) необходимо предпринять следующие действия.

Пусть z_k – состояние заряда в момент k . Воспользуемся формулой (6) для получения огрубленной оценки состояния заряда в момент k , используя метод инверсии кривой напряжения разомкнутой цепи:

$$\hat{z}_k = OCV^{-1}(v_k + R_0 i_k).$$

Данная оценка содержит большое количество шумов в силу неидеальности измерительных датчиков тока и напряжения. Несмотря на это величина \hat{z}_k сходится к истинным значениям состояния заряда при нулевом токе и имеет шумы, сходящиеся к гауссовскому распределению, при ненулевом.

Расширим функцию наблюдения $g(x_k, u_k, \theta)$, включив в нее дополнительно «искусственное» измерение состояния заряда,

$$g(x_k, u_k, \theta) = \begin{bmatrix} OCV(z_k) - \sum_j R_j i_{R_j, k} - R_0 i_k \\ OCV^{-1}(v_k + R_0 i_k) \end{bmatrix}.$$

Данный способ позволяет обеспечить сходимость Dual Kalman Filter за счет ввода дополнительной переменной наблюдения в вектор $g(x_k, u_k, \theta)$.

6.3.2 Dual Extended Kalman Filter

В данном параграфе подробнее рассмотрим применение метода эквивалентной цепи и DEKF алгоритма, шаги которых были приведены в главе 2 и параграфе 4.8.1 соответственно.

Согласно (26), для реализации DEKF требуется вычисление матриц \hat{A}_k , \hat{B}_k , \hat{C}_k^x , \hat{D}_k^x , \hat{C}_k^θ и \hat{D}_k^θ . Сделаем ряд предположений относительно введенной нами модели (9):

1. Пусть истинные значения тока равны $i_k + w_k$, где w_k – случайная величина, в то время как измеряемые – i_k ;
2. Примем значение выхода по току всегда равным 1, то есть $\eta = 1$ для всех k .

Уравнение состояния заряда в системе (9) имеет вид

$$z_{k+1} = z_k - \frac{\Delta t}{Q}(i_k + w_k),$$

а искомые производные, входящие в матрицы \hat{A}_k и \hat{B}_k , вычисляются как

$$\left. \frac{\partial z_{k+1}}{\partial z_k} \right|_{z_k = \hat{z}_k^+} = 1, \quad \left. \frac{\partial z_{k+1}}{\partial w_k} \right|_{w_k = \bar{w}} = -\frac{\Delta t}{Q}.$$

Введем обозначение

$$\tau_j = \exp\left(-\frac{\Delta t}{R_j C_j}\right),$$

тогда второе уравнение состояния в модели (9) можно переписать в виде

$$i_{R_j, k+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tau_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}}_{A_{RC}} i_{R_j, k} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - \tau_1 \\ 1 - \tau_2 \\ \vdots \end{bmatrix}}_{B_{RC}} (i_k + w_k),$$

где матрицы A_{RC} , B_{RC} играют роль множителей стоящих перед переменными состояния и управления соответственно.

Отсюда следует, что производные, входящие в матрицы \hat{A}_k и \hat{B}_k имеют вид

$$\left. \frac{\partial i_{R_j, k+1}}{\partial i_{R_j, k}} \right|_{i_{R_j, k} = \hat{i}_{R_j, k}^+} = A_{RC}, \quad \left. \frac{\partial i_{R_j, k+1}}{\partial w_k} \right|_{w_k = \bar{w}} = B_{RC}.$$

Таким образом,

$$\hat{A}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{RC} \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_k = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t}{Q} \\ B_{RC} \end{bmatrix}.$$

Далее рассмотрим вычисление матриц \hat{C}_k^x и \hat{D}_k^x . Для этого воспользуемся третьим уравнением системы (9):

$$y_k = OCV(z_k) - \sum_j R_j i_{R_j, k} - R_0 i_k + v_k,$$

где v_k – шум измерения. Отметим, что здесь и далее введенное нами предположение 1 придется отбросить, так как оно вносит зависимость между шумами процесса и измерения, что вступает в противоречие с основными положениям фильтра Калмана.

Отсюда следует, что

$$\hat{C}_k^x = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial y_k}{\partial z_k} \right|_{z_k = \hat{z}_k^-} & \left. \frac{\partial y_k}{\partial i_{R_j, k}} \right|_{i_{R_j, k} = \hat{i}_{R_j, k}^-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial OCV(z_k)}{\partial z_k} \right|_{z_k = \hat{z}_k^-} & -R_j \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}_k^x = \frac{\partial y_k}{\partial v_k} = 1,$$

где производная $\left. \frac{\partial OCV(z_k)}{\partial z_k} \right|_{z_k = \hat{z}_k^-}$ вычисляется численно на каждом шаге алгоритма с использованием значений кривой напряжения разомкнутой цепи.

Для реализации алгоритма DEKF осталось вычислить значения матриц \hat{C}_k^θ и \hat{D}_k^θ . Пусть

$$\theta_k = \begin{bmatrix} R_0 & R_j & \tau_j \end{bmatrix}$$

$$g_k = OCV(z_k) - \sum_j R_j i_{R_j, k} - R_0 i_k + e_k,$$

где e_k – шум системы (см. параграф 4.8.1).

Вычислим значения компонент матрицы \hat{C}_k^θ . В соответствии с алгоритмом нахождения производной сложной функции

$$\begin{aligned}\hat{C}_k^\theta &= \left. \frac{dg_k}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} \\ &= \left. \frac{\partial g_k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} + \left. \frac{\partial g_k}{\partial z_k} \right|_{z_k=\hat{z}_k^-} \cdot \left. \frac{dz_k}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} + \left. \frac{\partial g_k}{\partial i_{R_j,k}} \right|_{i_{R_j,k}=\hat{i}_{R_j,k}^-} \cdot \left. \frac{di_{R_j,k}}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial g_k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} &= \begin{bmatrix} -i_{k-1} & -i_{R_j,k-1} & 0 \end{bmatrix} \\ \left. \frac{d\hat{z}_k^-}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} &= \left. \frac{\partial z_k}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} + \left. \frac{\partial z_k}{\partial z_{k-1}} \right|_{z_{k-1}=\hat{z}_{k-1}^+} \cdot \left. \frac{dz_{k-1}}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \left. \frac{d\hat{i}_{R_j,k}^-}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} &= \left. \frac{\partial i_{R_j,k}}{\partial \theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} + \left. \frac{\partial i_{R_j,k}}{\partial i_{R_j,k-1}} \right|_{i_{R_j,k-1}=\hat{i}_{R_j,k-1}^+} \cdot \left. \frac{di_{R_j,k-1}}{d\theta} \right|_{\theta=\hat{\theta}_k^-} = \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} \end{bmatrix} \\ a_{1,2} &= -i_{k-1} \cdot \left(\exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_j} \right) - 1 \right) \\ a_{1,3} &= \frac{\Delta t}{\tau_j^2} \cdot \left(\hat{i}_{R_j,k}^- - R_j i_{k-1} \right) \cdot \exp \left(-\frac{\Delta t}{\tau_j} \right).\end{aligned}$$

Матрица \hat{D}_k^θ имеет вид

$$\hat{D}_k^\theta = \frac{\partial g_k}{\partial e_k} = 1.$$

Полученные матрицы \hat{A}_k , \hat{B}_k , \hat{C}_k^x , \hat{D}_k^x , \hat{C}_k^θ и \hat{D}_k^θ представляют собой аналитически вычисленные производные, необходимые для реализации шагов DEKF на различных программно-аппаратных платформах (параграф 4.8.1).

6.3.3 Dual Sigma-Point Kalman Filter

Реализация алгоритма Dual Sigma-Point Kalman Filter (см. параграф 4.8.2) не требует аналитического вычисления производных, что является одним из его достоинств. Согласно основным шагам алгоритма DSPKF, нам требуется сформировать два набора σ -точек в соответствии с формулами (27)

и (28) и определить два набора коэффициентов h , γ , $\alpha_0^{(m)}$, $\alpha_k^{(m)}$, $\alpha_0^{(c)}$ и $\alpha_k^{(c)}$ для фильтров состояния и параметров.

Однако сходимость алгоритма DSPKF не гарантируется в случае, если ковариационные матрицы $\Sigma_{x,k}$ и $\Sigma_{\theta,k}$ перестают быть положительно определенными на шаге k . Для обеспечения сходимости воспользуемся разложением Холецкого, которое позволяет представить произвольную матрицу в виде произведения двух матриц, одна из которых является нижней треугольной со строго положительными элементами на диагонали, вторая – она же, но транспонированная [19].

Таким образом, на каждом шаге алгоритма будем проверять матрицы $\Sigma_{x,k}$ и $\Sigma_{\theta,k}$ на положительную определенность. В случаях, когда какая-либо из матриц теряет свойство положительной определенности, будем использовать разложение Холецкого, получая новую положительно полуопределенную матрицу, используемую в дальнейшем в качестве $\Sigma_{x,k}$ или $\Sigma_{\theta,k}$.

6.3.4 Сравнительный анализ

Применим алгоритмы из предыдущих параграфов (6.3.2 и 6.3.3) к имеющимся наборам данных (см. таблицу 2). Результаты оценки состояния заряда и внутреннего сопротивления для открытых наборов данных с использованием метода DEKF представлены на графиках 25 – 30, с использованием DSPKF – 31 – 36.

В параграфе 4.4 было отмечено, что фильтр Калмана минимизирует среднеквадратичную ошибку, которая в нашем случае вычисляется в соответствии с формулой

$$r = \sqrt{\mathbb{E}(x_k - y_k)^2},$$

где x_k – контрольные значения, y_k – оценочные значения. Чем меньше значения r , тем лучше результат оценки.

В данной работе в качестве контрольных значений x_k были использованы номинальные значения внутреннего сопротивления, предоставленные производителем ячейки, для вычисления среднеквадратичной ошибки r алгоритмов оценки внутреннего сопротивления, то есть, мы исходили из предположения, что батарея не начала деградировать. Для алгоритмов оценки состояния заряда значения x_k были вычислены заранее в автономном режиме. Автономный режим подразумевает вывод батареи из эксплуатации, подачу на нее того же сигнала тока, что и в случае активной эксплуатации, подключение аккумулятора к специальным приборам для вычисления значений кривой состояния заряда на основе внутренних электрохимических процессов батареи [39].

Среднеквадратичные ошибки оценки и время вычисления для алгоритмов DEKF, DSPKF и всех наборов данных приведены в таблице 3.

Как было отмечено ранее в параграфе 6.3.1, в качестве необходимого критерия сходимости методов DEKF и DSPKF используют отклонение предсказанных алгоритмами значений напряжения от измеренных. Сходимость алгоритмов DEKF и DSPKF на открытых наборах данных продемонстрирована на графиках 37 – 42.

Анализируя приведенные таблицу и графики, можно сделать вывод, что результаты, получаемые с использованием реализованных алгоритмов, DEKF и DSPKF, не уступают друг другу как по времени вычисления, так и по качеству получаемых оценок состояния заряда и внутреннего сопротивления. Однако алгоритм DSPKF предоставляет более качественную оценку внутреннего сопротивления. Более того, отметим, что рассмотренные методы работают одинаково качественно для данных, полученных с ячеек различной химии при разных температурах.

6.4 Методы эквивалентной цепи и наименьших квадратов

Данный параграф посвящен оценке текущей емкости аккумулятора, как одного из параметров состояния «здоровья».

Рассмотрим величину $S_{v_k}^Q$ – чувствительность измерения напряжения к текущей емкости аккумулятора. В соответствии с моделью (9) имеем

$$\begin{aligned} S_{v_k}^Q &= \frac{Q}{v_k} \frac{dv_k}{dQ} \\ &= \frac{Q}{v_k} \frac{d}{dQ} \left(OCV(z_k) - \sum_j R_j i_{R_j,k} - i_k R_0 \right). \end{aligned}$$

в абсолютном выражении $\frac{Q}{v_k}$ – это достаточно большая величина, а выражение в скобках не содержит величины емкости явно. Таким образом, в соответствии с правилом дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dOCV(z_k)}{dQ} = \frac{\partial OCV(z_k)}{\partial z_k} \frac{dz_k}{dQ}.$$

Известно, что наклон кривой напряжения разомкнутой цепи для большинства химических ячеек имеет малый угол, что соответствует малым значениям величины $\frac{\partial OCV(z_k)}{\partial z_k}$. Вычислим полную производную состояния заряда

$$\begin{aligned} \frac{dz_k}{dQ} &= \frac{dz_{k-1}}{dQ} - \eta_{k-1} i_{k-1} \Delta t \frac{1/Q}{dQ} \\ &= \frac{dz_{k-1}}{dQ} + \frac{\eta_{k-1} i_{k-1} \Delta t}{Q^2}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое получившегося выражения вычисляется рекурсивно и увеличивается, если ток не меняет направления. Второе слагаемое содержит в знаменателе величину Q^2 , измеряемую в Кулонах, поэтому это слагаемое имеет малый порядок, а, значит и величина $\frac{dz_k}{dQ}$ мала.

Исходя из выше изложенного, можно сделать вывод, что в измерениях напряжения содержится очень мало информации о текущей емкости батареи. Для корректной оценки текущей емкости батареи нам также тре-

буется сигнал тока, протекающий в течение длительного времени в одном направлении. Это обусловлено тем, что, чем больше перепады в значениях состояния заряда, тем проще оценить текущую емкость аккумулятора. Однако подход, основанный на применении Dual Kalman Filter, не подходит для оценки текущей емкости, так как сходимость такого метода не может быть гарантирована заблаговременно. Далее покажем, как применить методы наименьших квадратов для решения обозначенной выше задачи.

6.4.1 Оценка текущей емкости

Воспользуемся методом наименьших квадратов и моделью (9) для оценки текущей емкости накопителей.

Рассмотрим уравнение состояния

$$z_{k_2} = z_{k_1} - \frac{1}{Q} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \eta_k i_k.$$

Перенос слагаемых позволяет получить систему линейных уравнений вида

$$\underbrace{- \sum_{k=k_1}^{k_2-1} \eta_k i_k}_y = Q \underbrace{(z_{k_2} - z_{k_1})}_x,$$

что соответствует виду системы (29), используемой в методах наименьших квадратов.

6.4.2 Инициализация метода наименьших квадратов

Вычисление величины \hat{Q}_n с использованием рассмотренных в главе 5 рекурсивных методов требует инициализации начальных параметров. Простейший способ инициализации заключается в обнулении всех начальных параметров, но он увеличивает во времени процесс сходимости. Список значений для инициализации параметров для всех использованных в работе методов приведен в таблице 4, где σ_{y_0} – отклонение в номинальном

значении емкости Q_{nom} , обозначенное производителем аккумулятора, σ_{x_0} – погрешность датчика измерения тока [37].

6.4.3 Сравнительный анализ

Значения интеграла (33):

$$Q(\chi^2|\nu) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \int_{\chi^2/2}^{\infty} e^{-t} t^{\nu/2-1} dt,$$

позволяющего вычислить качество оценки метода, и время вычисления рекурсивных алгоритмов, рассмотренных в главе 5 и допускающих реализацию во встраиваемых системах, приведены в таблице 5. Результаты оценки для открытых наборов данных, где для оценки состояния заряда использовался алгоритм DEKF, представлены на графиках 43, 45, 47, алгоритм DSPKF – 44, 46, 48.

На представленных графиках видно, что метод WLS показал наихудший результат для всех наборов данных и всех алгоритмов оценки состояния заряда. Данный итог был предсказуем, так как в основе метода лежит предположение о наличии шумов только в одном измеряемом сигнале (см. параграф 5.1).

Качество оценки, полученное с использованием методов PTLS и AWTLS и различных подходов к оценке состояния заряда (DEKF / DSPKF), удовлетворяет введенному ранее статистическому критерию (33). Более того, полученное решение никогда не выходит за границы доверительного интервала (см. параграф 5.4), определяемого отдельно для каждого из методов с использованием вычисленных аналитически гессианов целевых функций, – (34), (36). Отметим также, что время вычисления текущей емкости каждым из алгоритмов является приемлемым для использования методов в реальном времени во встраиваемых системах.

Также было показано, что методы PTLS и AWTLS сходятся и на данных, частота дискретизации которых значительно превышает 1 с: на-

бор данных 007, таблица 2. Отметим, что данный набор примечателен и тем, что имеющиеся в нем данные были собраны в течение длительного интервала времени, что позволяет отследить процесс падения текущей емкости батареи более чем на 1 %.

В данной главе было подробно описано применение методов эквивалентной цепи и наименьших квадратов, а также модификаций фильтра Калмана к данным, полученным с реальных накопителей энергии, для оценки состояний заряда и «здоровья» аккумуляторов. Было показано, что рассмотренные алгоритмы сходятся к значениям, имеющим физический смысл, допускают реализацию во встраиваемых системах, а также универсальны, так как могут быть использованы как для различных химий, так и для разных наборов ячеек.

№ набора	Химия ячейки	Номинальная емкость	Номинальное напряжение	Температура измерения	Частота дискретизации данных	Временной интервал	Владелец данных	Степень доступности данных
001	NMC	5 Ач	3.6 В	5° C	1 с	11.28 ч	[30]	открытые
002	NMC	5 Ач	3.6 В	25° C	1 с	10.46 ч	[30]	открытые
003	LTO	1600 Ач	607.2 В	24° C	1 с	37.78 ч	ООО «Сименс»	открытые
004	NMC	3.6 Ач	3.6 В	24° C	1 с	6.7 ч	Sheffield University	закрытые
005	LTO	20 Ач	2.3 В	24° C	1 с	24 ч	Sheffield University	закрытые
006	LTO	1600 Ач	607.2 В	24° C	1 с	12 ч	Sheffield University	закрытые
007	NMC	27 Ач	3.6 В	25° C	1 месяц	9 месяцев	Siemens AG	закрытые

Таблица 2: Сводная таблица используемых в работе данных

№ набора	Алгоритм	Время вычисления	Точность оценки	
001	DEKF	50.351 с	Состояние заряда	0.0047
			Внутреннее сопротивление	0.1407
	DSPKF	52.626 с	Состояние заряда	0.0817
			Внутреннее сопротивление	0.1127
002	DEKF	42.287 с	Состояние заряда	0.0064
			Внутреннее сопротивление	0.2246
	DSPKF	48.448 с	Состояние заряда	0.0515
			Внутреннее сопротивление	0.0297
003	DEKF	92.542 с	Состояние заряда	0.0812
			Внутреннее сопротивление	0.0060
	DSPKF	98.132 с	Состояние заряда	0.0400
			Внутреннее сопротивление	0.0153
004	DEKF	35.911 с	Состояние заряда	0.0127
			Внутреннее сопротивление	0.1576
	DSPKF	40.354 с	Состояние заряда	0.0950
			Внутреннее сопротивление	0.0357
005	DEKF	63.290 с	Состояние заряда	0.0318
			Внутреннее сопротивление	0.1712
	DSPKF	70.758 с	Состояние заряда	0.0344
			Внутреннее сопротивление	0.1190
006	DEKF	58.242 с	Состояние заряда	0.0361
			Внутреннее сопротивление	0.1106
	DSPKF	70.891 с	Состояние заряда	0.0224
			Внутреннее сопротивление	0.0699
007	DEKF	Применение алгоритмов невозможно в силу низкой частоты дискретизации данных		
	DSPKF			

Таблица 3: Результаты использования алгоритмов DEKF и DSPKF

Метод	Начальные параметры
Weighted Ordinary Least Squares	$c_{1,0} = 1/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{2,0} = Q_{nom}/\sigma_{y_0}^2$
Proportional Total Least Squares	$c_{1,0} = 1/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{2,0} = Q_{nom}/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{3,0} = Q_{nom}^2/\sigma_{y_0}^2$
Approximate Weighted Total Least Squares	$c_{1,0} = 1/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{2,0} = Q_{nom}/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{3,0} = Q_{nom}^2/\sigma_{y_0}^2$
	$c_{4,0} = 1/\sigma_{x_0}^2$
	$c_{5,0} = Q_{nom}/\sigma_{x_0}^2$
	$c_{6,0} = Q_{nom}^2/\sigma_{x_0}^2$

Таблица 4: Инициализация начальных параметров методов наименьших квадратов

№ набора	Алгоритм вычисления состояния заряда	Метод	Время вычисления	Качество оценки
001	DEKF	WLS	3.320 с	0
		PTLS	2.988 с	1
		AWTLS	3.527 с	1
	DSPKF	WLS	3.212 с	0
		PTLS	3.008 с	1
		AWTLS	3.061 с	1
002	DEKF	WLS	3.024 с	0
		PTLS	3.008 с	1
		AWTLS	3.120 с	1
	DSPKF	WLS	3.372 с	0
		PTLS	3.311 с	1
		AWTLS	3.419 с	1
003	DEKF	WLS	9.826 с	0
		PTLS	9.969 с	1
		AWTLS	10.010 с	1
	DSPKF	WLS	9.850 с	0
		PTLS	10.020 с	1
		AWTLS	10.005 с	1
004	DEKF	WLS	5.944 с	0
		PTLS	6.335 с	1
		AWTLS	6.614 с	1
	DSPKF	WLS	5.495 с	0
		PTLS	6.475 с	1
		AWTLS	6.566 с	1
005	DEKF	WLS	6.244 с	0
		PTLS	6.688 с	1
		AWTLS	6.576 с	1
	DSPKF	WLS	6.457 с	0
		PTLS	6.396 с	1
		AWTLS	6.310 с	1
006	DEKF	WLS	2.451 с	0
		PTLS	3.435 с	1
		AWTLS	3.396 с	1
	DSPKF	WLS	3.310 с	0
		PTLS	3.251 с	1
		AWTLS	3.539 с	1
007	Состояние заряда было получено из кривой напряжения	WLS	1.030 с	0
		PTLS	1.045 с	1
		AWTLS	1.044 с	1

Таблица 5: Результаты использования методов наименьших квадратов

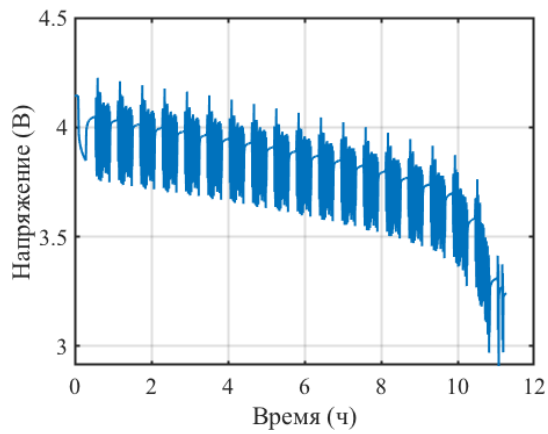


Рис. 19: Набор данных 001: измеренный сигнал напряжения

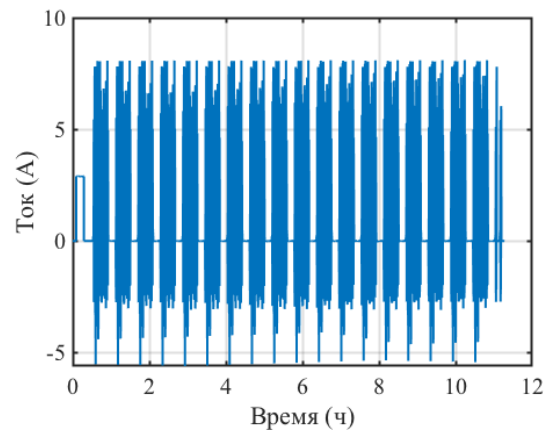


Рис. 20: Набор данных 001: измеренный сигнал тока

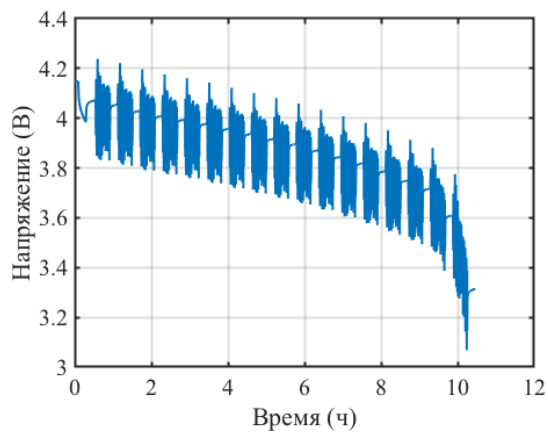


Рис. 21: Набор данных 002: измеренный сигнал напряжения

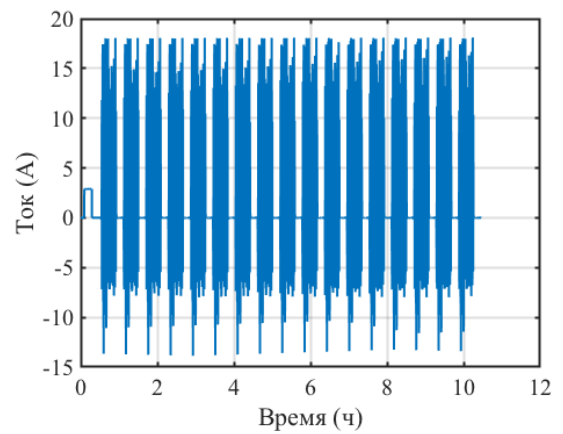


Рис. 22: Набор данных 001: измеренный сигнал тока

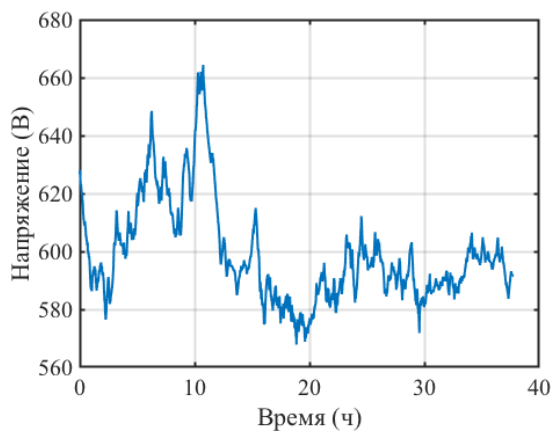


Рис. 23: Набор данных 003: измеренный сигнал напряжения

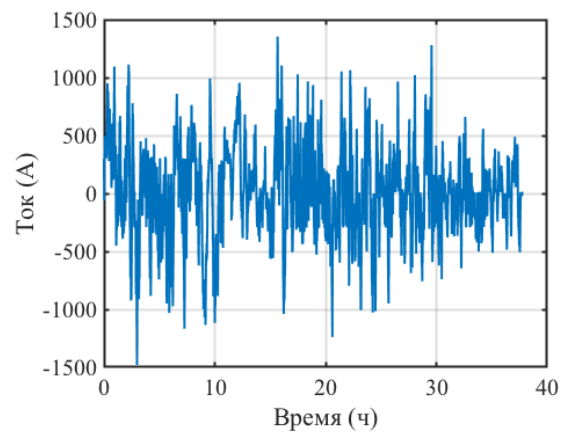


Рис. 24: Набор данных 003: измеренный сигнал тока

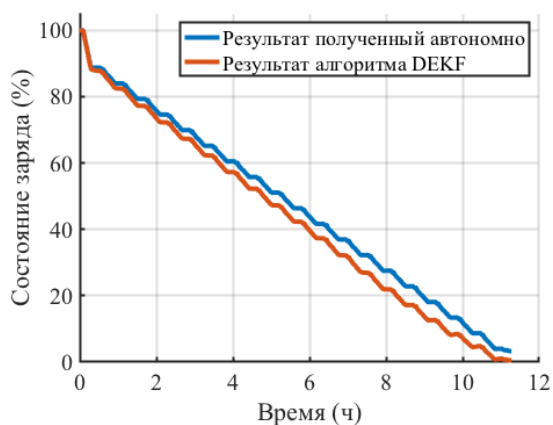


Рис. 25: Набор данных 001: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DEKF

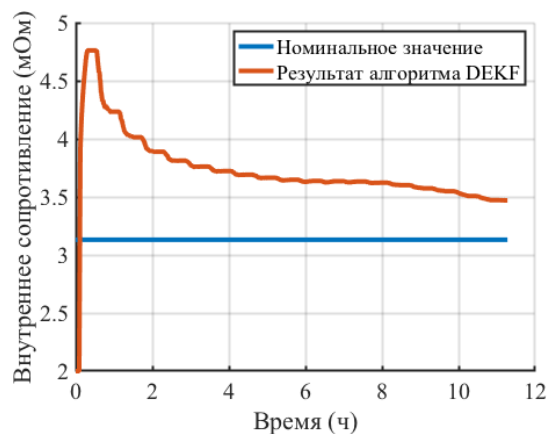


Рис. 26: Набор данных 001: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DEKF

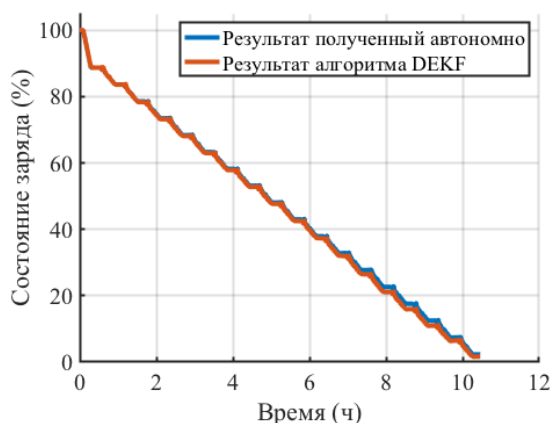


Рис. 27: Набор данных 002: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DEKF

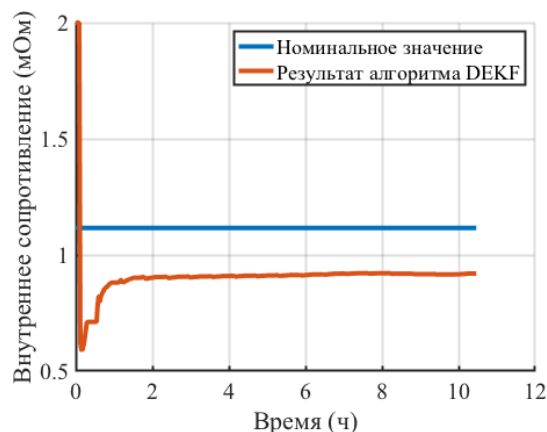


Рис. 28: Набор данных 002: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DEKF

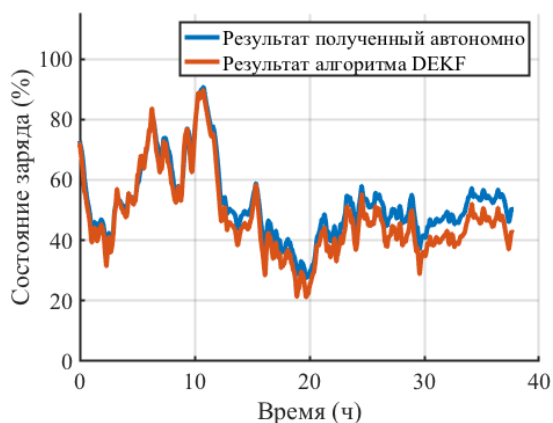


Рис. 29: Набор данных 003: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DEKF

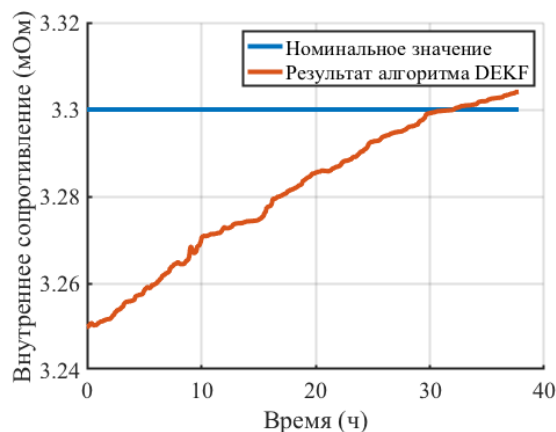


Рис. 30: Набор данных 003: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DEKF

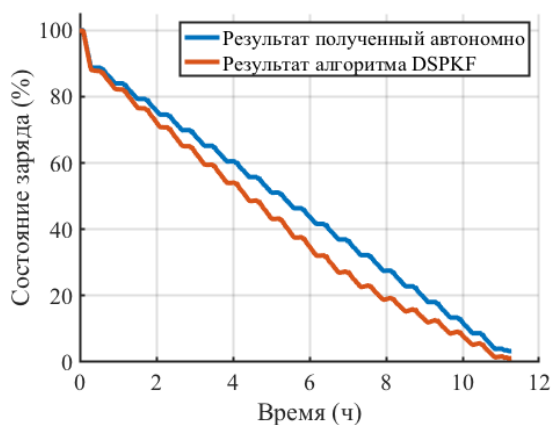


Рис. 31: Набор данных 001: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DSPKF

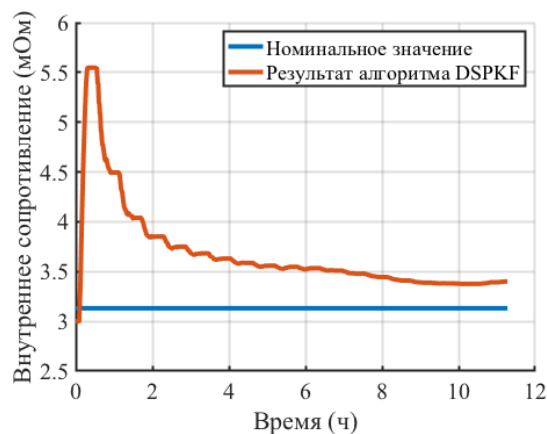


Рис. 32: Набор данных 001: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DSPKF

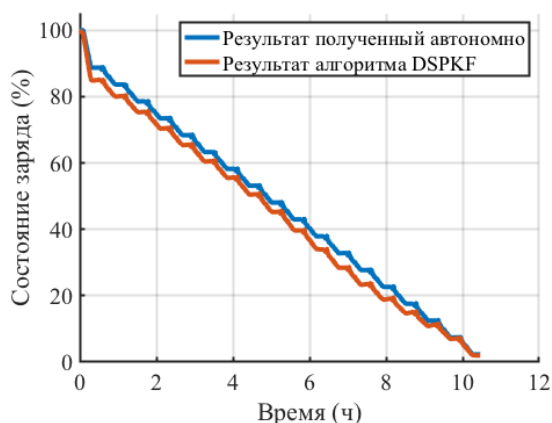


Рис. 33: Набор данных 002: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DSPKF

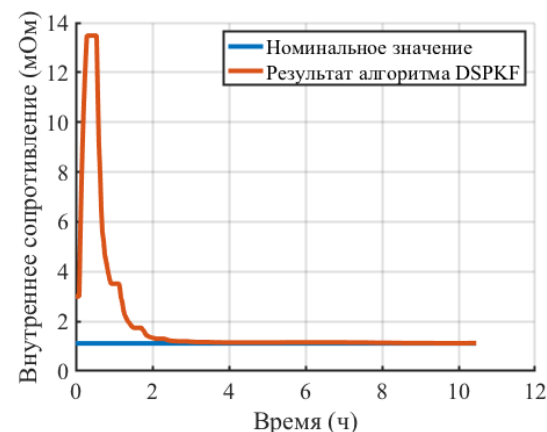


Рис. 34: Набор данных 002: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DSPKF

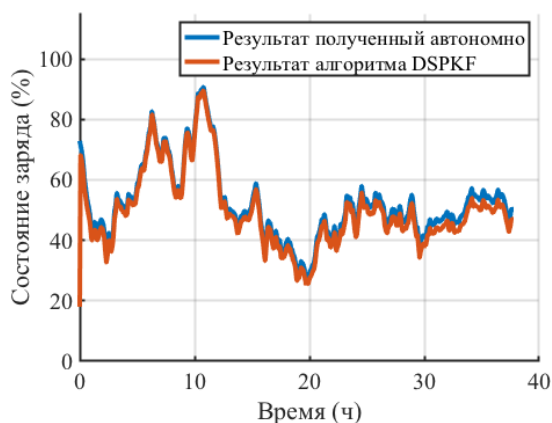


Рис. 35: Набор данных 003: оценка состояния заряда с использованием алгоритма DSPKF

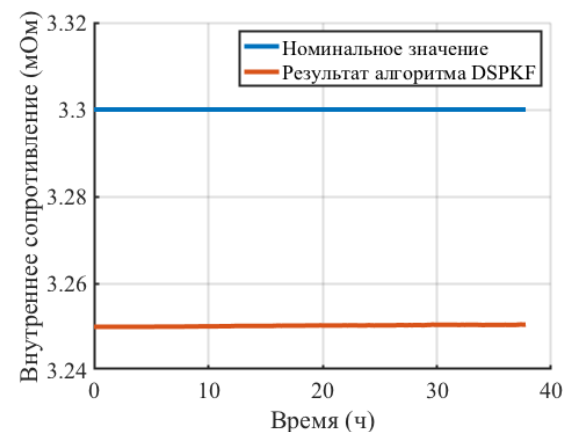


Рис. 36: Набор данных 003: оценка внутреннего сопротивления с использованием алгоритма DSPKF

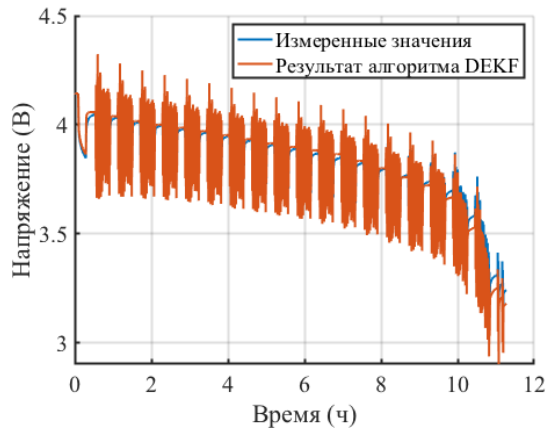


Рис. 37: Набор данных 001: сходимость алгоритма DEKF

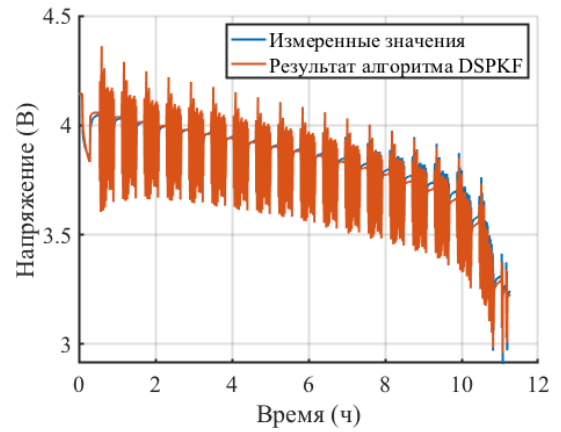


Рис. 38: Набор данных 001: сходимость алгоритма DSPKF

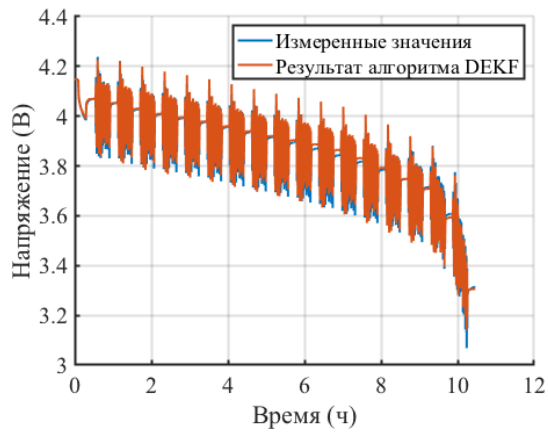


Рис. 39: Набор данных 002: сходимость алгоритма DEKF

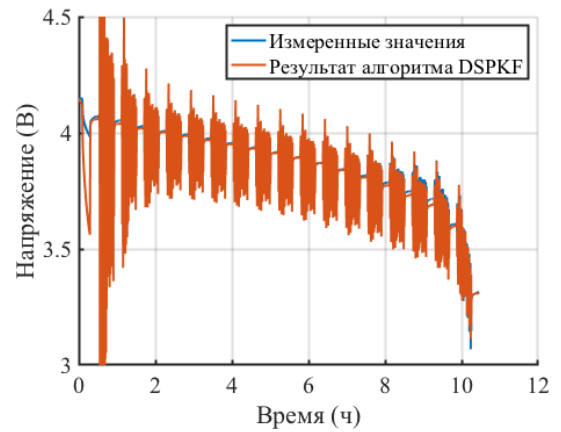


Рис. 40: Набор данных 002: сходимость алгоритма DSPKF

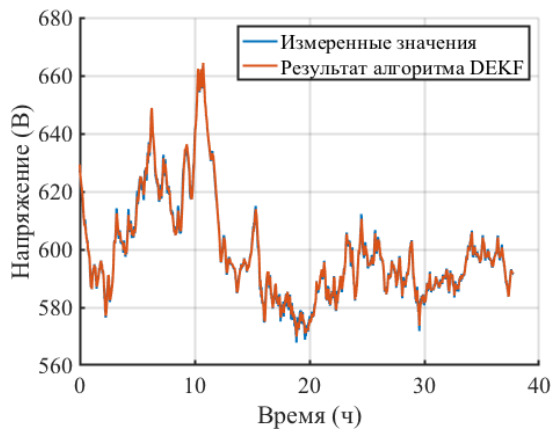


Рис. 41: Набор данных 003: сходимость алгоритма DEKF

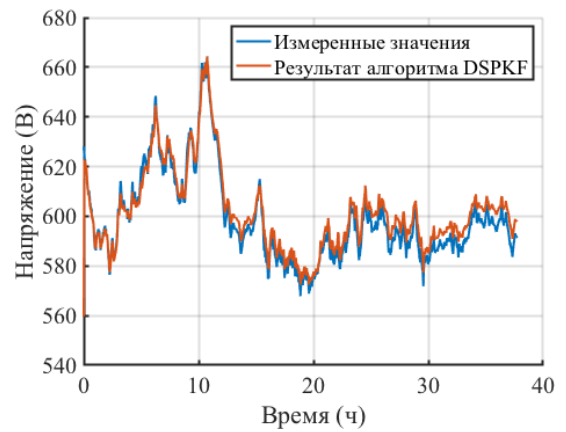


Рис. 42: Набор данных 003: сходимость алгоритма DSPKF

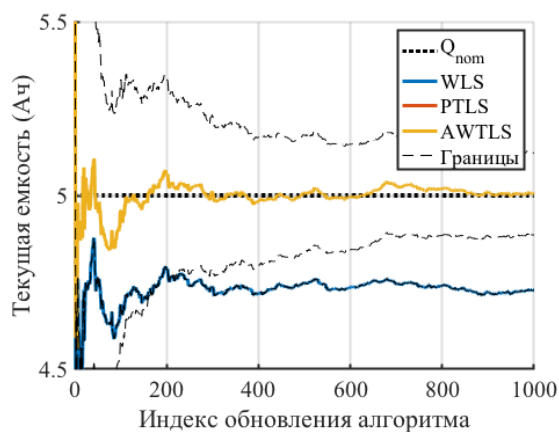


Рис. 43: Набор данных 001: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DEKF)

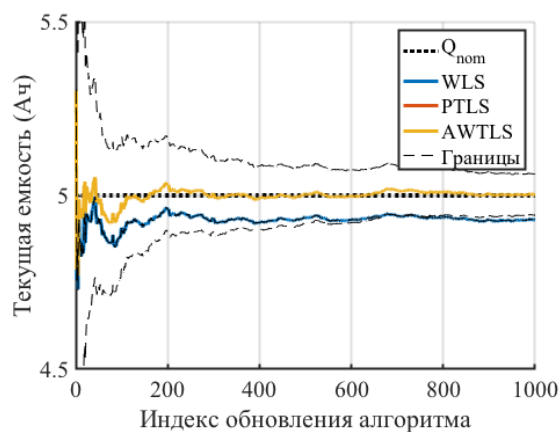


Рис. 44: Набор данных 001: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DSPKF)

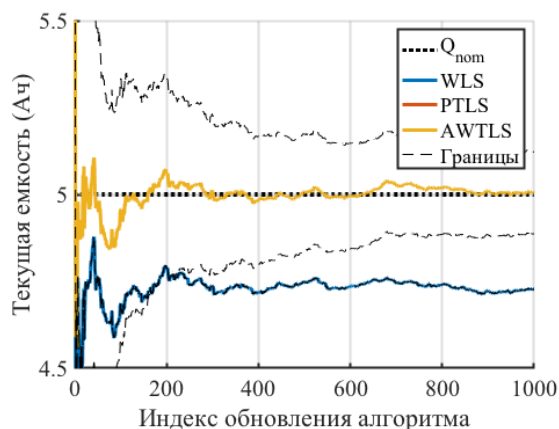


Рис. 45: Набор данных 002: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DEKF)

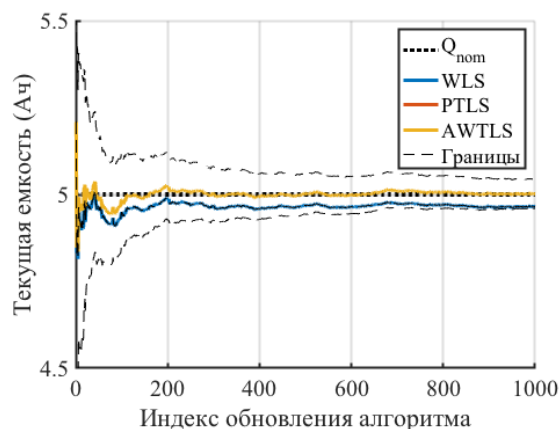


Рис. 46: Набор данных 002: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DSPKF)

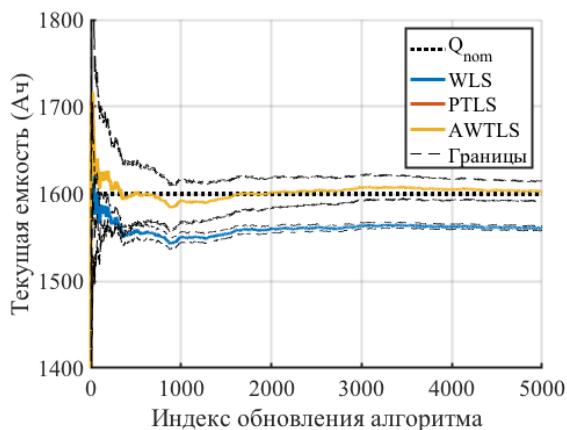


Рис. 47: Набор данных 003: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DEKF)

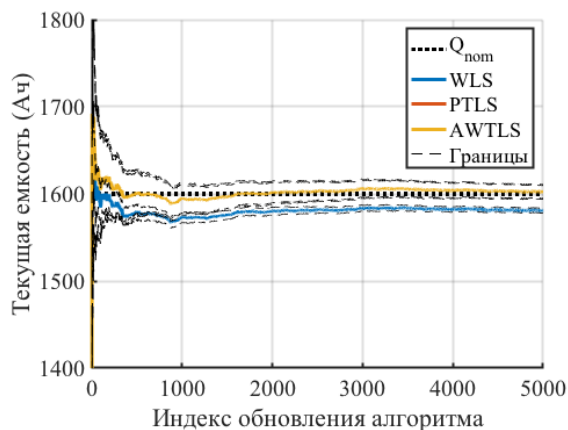


Рис. 48: Набор данных 003: оценка текущей емкости (оценка состояния заряда произведена с использованием алгоритма DSPKF)

Выводы

Сравнительный анализ методов DEKF и DSPKF, приведенный в параграфе 6.3.4, показал, что рассмотренные алгоритмы предоставляют оценку состояния заряда и внутреннего сопротивления батареи с высокой степенью точности. Однако качество оценки внутреннего сопротивления алгоритмом DSPKF лучше, чем алгоритмом DEKF, что вызвано использованием нелинейной модели ячейки в ее первоначальном виде, то есть без дополнительной линеаризации (параграф 4.8.2). Отметим, что оценка состояния заряда на основе кулоновского расчета, то есть интегрирование тока на заданном интервале, не позволяет получить результаты с такой же степенью точности в силу наличия шумов в сигналах тока (см. Рис. 20, 22, 24).

В процессе реализации алгоритмов было замечено, что некорректное определение напряжения разомкнутой цепи, входящего в уравнение наблюдения системы (9), приводит к расходимости алгоритмов DEKF и DSPKF: результаты оценки величин не имеют физического смысла, например, оценка состояния заряда принимает отрицательные значения. Поэтому очень важно заранее убедиться в корректности используемой кривой напряжения разомкнутой цепи.

До сих пор открытым вопросом в литературе остается инициализация Dual Kalman Filter, включающая в себя задание начальных значений ковариационных матриц $\Sigma_{\tilde{x}}, \Sigma_{\tilde{\theta}}, \Sigma_{\tilde{w}}, \Sigma_{\tilde{v}}, \Sigma_{\tilde{r}}, \Sigma_{\tilde{e}}$ (см. параграф 4.8). В данной работе подбор начальных значений всех матриц был выполнен эмпирически, что не гарантирует получения наилучшей из возможных оценок состояния заряда и внутреннего сопротивления. Автоматическое определение начальных значений ковариационных матриц является предметом дальнейших исследований.

Сравнительный анализ методов WLS, PTLIS и AWTLS (параграф 6.4.3) позволяет сделать вывод, что применение методов PTLIS и AWTLS

допустимо в системах управления батареями в реальном времени при различных условиях эксплуатации аккумуляторов без необходимости дополнительных изменений. Более того, в работе было показано, что методы PTLS и AWTLS позволяют оценить падение текущей емкости батареи, что представляет наибольший пользовательский интерес, так как текущая емкость ячейки – это количество доступной энергии, используемой потребителем.

Алгоритмы, предоставляющие допустимое качество оценки, – DEKF, DSPKF для оценки состояния заряда и внутреннего сопротивления, и PTLS, AWTLS для оценки текущей емкости, одинаково легко адаптируются под различные химии ячеек и не требуют дополнительных нововведений при изменении температуры измерений. Также отметим, что приведенные алгоритмы могут быть использованы как для данных, поступающих с одной ячейки (например, наборы данных 001 и 002, таблица 2), так и для данных, измеренных с набора ячеек, образующих аккумуляторные стойку или модуль (например, набор данных 003, таблица 2).

Заключение

В работе была рассмотрена одна из важных задач в области накопителей энергии – непрерывный мониторинг. В заключение, выделим практические результаты исследования:

1. Алгоритмы одновременной оценки состояния заряда и внутреннего сопротивления ячейки, Dual Extended Kalman Filter и Dual Sigma-Point Kalman Filter, реализованы в среде MATLAB.
2. Методы наименьших квадратов для оценки текущей емкости ячейки, Weighted Ordinary Least Squares, Weighted Proportional Total Least Squares и Approximate Weighted Total Least Squares, реализованы в среде MATLAB.
3. В контексте допустимости реализации рассмотренных подходов оценки состояния заряда и состояния «здоровья» ячейки во встраиваемых системах, адаптации к изменяющимся внешним факторам, а также адаптируемости к различным химиям литий-ионных ячеек произведен сравнительный анализ полученных результатов.

Задача мониторинга накопителей энергии не является единственной, представляющий пользовательский интерес. Растущий спрос на аккумуляторы на рынке электроэнергии пробудил интерес к решению других задач. Например, одной из наиболее актуальных проблем сегодняшнего дня является предсказание текущей емкости батареи на основе данных ее использования, включающих в себя условия хранения (температура, влажность и т.д.), эксплуатации (ток, напряжение) и количество циклов «заряд-разряд». Основная причина, препятствующая быстрой разработке подобного рода алгоритмов, – отсутствие данных длительного использования аккумуляторов, позволяющих откалибровать получившиеся методы.

Актуальные исследования в области накопителей энергии включают в себя не только алгоритмы обработки данных, но и разработку новых химических соединений, позволяющих достичь высоких значений напряжения и большей величины емкости [15].

Сегодня аккумуляторы используются во многих сферах жизнедеятельности человека. Так, в Великобритании уже сейчас функционирует энергетический рынок, торговля на котором была бы невозможна без использования батарей, позволяющих продавать энергию в моменты остановки генераторов [26]. Дальнейшее производство и разработка электрических самолетов, поездов, паромов и автомобилей также требует решения задач в области накопителей энергии, связанных с вопросами безопасности и своевременной диагностики [29].

Список литературы

- [1] Буре В. М., Парилина Е. М. Теория вероятностей и математическая статистика. Лань, 2013. 416 с.
- [2] Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. – Лань, 2008.
- [3] Спасский Б. И. История физики. – 1977.
- [4] Anderson B. D. O., Moore J. B. Optimal filtering //Englewood Cliffs. – 1979. – Т. 21. – С. 22-95.
- [5] Aylor J. H., Thieme A., Johnso B. W. A battery state-of-charge indicator for electric wheelchairs //IEEE transactions on industrial electronics. – 1992. – Т. 39. – №. 5. – С. 398-409.
- [6] Ayrton W. E., Mather T. Practical electricity: a laboratory and lecture course, for first year students of electrical engineering, based on the practical definitions of the electrical units. – Cassell and Company [Limited], 1916.
- [7] Barak M. (ed.). Electrochemical power sources: primary and secondary batteries. – IET, 1980. – №. 1.
- [8] Bergveld H. J., Pop V., Notten P. H. L. Method of estimating the State-of-Charge and of the use time left of a rechargeable battery, and apparatus for executing such a method. – 2005.
- [9] Besenhard J. O. The electrochemical preparation and properties of ionic alkali metal-and NR₄-graphite intercalation compounds in organic electrolytes //Carbon. – 1976. – Т. 14. – №. 2. – С. 111-115.
- [10] Bhangu B. S. et al. Nonlinear observers for predicting state-of-charge and state-of-health of lead-acid batteries for hybrid-electric vehicles //IEEE transactions on vehicular technology. – 2005. – Т. 54. – №. 3. – С. 783-794.

- [11] Bloom I. et al. Differential voltage analyses of high-power lithium-ion cells.
4. Cells containing NMC //Journal of Power Sources. – 2010. – T. 195. – №. 3. – C. 877-882.
- [12] Carbó A. D. Electrochemical dictionary. Allen J. Bard, György Inzelt, Fritz Scholz (eds) //Journal of Solid State Electrochemistry. – 2009. – T. 13. – №. 3. – C. 505-506.
- [13] Coroban V., Boldea I., Blaabjerg F. A novel on-line state-of-charge estimation algorithm for valve regulated lead-acid batteries used in hybrid electric vehicles //Electrical Machines and Power Electronics, 2007. ACEMP'07. International Aegean Conference on. – IEEE, 2007. – C. 39-46.
- [14] Corrigan D., Masias A. Batteries for electric and hybrid vehicles, Reddy TB (ed) Linden's handbook of batteries. – 2011.
- [15] Di Lecce D., Verrelli R., Hassoun J. Lithium-ion batteries for sustainable energy storage: recent advances towards new cell configurations //Green Chemistry. – 2017. – T. 19. – №. 15. – C. 3442-3467.
- [16] Edison T. A. Storage battery : пат. 1266780 США. – 1918.
- [17] El Mejdoubi A. et al. State-of-charge and state-of-health lithium-ion batteries' diagnosis according to surface temperature variation //IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2016. – T. 63. – №. 4. – C. 2391-2402.
- [18] Gray D. E., Ollier J. O. Electric condenser : пат. 2299228 США. – 1942.
- [19] Horn R. A., Horn R. A., Johnson C. R. Matrix analysis. – Cambridge university press, 1990.
- [20] Hu X. et al. Online estimation of an electric vehicle lithium-ion battery using recursive least squares with forgetting //American Control Conference (ACC), 2011. – IEEE, 2011. – C. 935-940.

- [21] Julier S. J., Uhlmann J. K. Unscented filtering and nonlinear estimation //Proceedings of the IEEE. – 2004. – T. 92. – №. 3. – C. 401-422.
- [22] Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems //Journal of basic Engineering. – 1960. – T. 82. – №. 1. – C. 35-45.
- [23] Krüger E., Tran Q. T., Mamadou K. Normalized least mean squares observer for battery parameter estimation //PowerTech, 2015 IEEE Eindhoven. – IEEE, 2015. – C. 1-6.
- [24] Linden D. Handbook of batteries //Fuel and Energy Abstracts. – 1995. – T. 4. – №. 36. – C. 265.
- [25] Moura S. J., Krstic M., Chaturvedi N. A. Adaptive PDE observer for battery SOC/SOH estimation //ASME 2012 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference joint with the JSME 2012 11th Motion and Vibration Conference. – American Society of Mechanical Engineers, 2012. – C. 101-110.
- [26] National Grid, UK. <https://www.nationalgrid.com/uk>
- [27] Nejad S., Gladwin D. T., Stone D. A. Enhanced state-of-charge estimation for lithium-ion iron phosphate cells with flat open-circuit voltage curves //Industrial Electronics Society, IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE. – IEEE, 2015. – C. 003187-003192.
- [28] NFPA A. 70-National Electrical Code; National Fire Protection Association; 2005 //Prince George County, Virginia SUPERVISORY CONTROL AND South Crater Road Wastewater Pump Station DATA ACQUISITION (SCADA) SYSTEM March. – 2017. – T. 13. – C. 5002-2.
- [29] Notter D. A. et al. Contribution of Li-ion batteries to the environmental impact of electric vehicles. – 2010.
- [30] Open-Source Data. <http://mocha-java.uccs.edu/BMS2/CH3/ESCEKF.zip>

- [31] Plett G. L. et al. Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 1. Background //Journal of Power Sources. – 2004. – T. 134. – №. 2. – C. 252-261.
- [32] Plett G. L. et al. Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 1. Background //Journal of Power Sources. – 2004. – T. 134. – №. 2. – C. 262-276.
- [33] Plett G. L. Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 3. State and parameter estimation //Journal of Power sources. – 2004. – T. 134. – №. 2. – C. 277-292.
- [34] Plett G. L. Dual and joint EKF for simultaneous SOC and SOH estimation //CD-ROM Proceedings of the 21st Electric Vehicle Symposium (EVS21),(Monaco: April 2005). – 2005.
- [35] Plett G. L. Sigma-point Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 1: Introduction and state estimation //Journal of Power Sources. – 2006. – T. 161. – №. 2. – C. 1356-1368.
- [36] Plett G. L. Sigma-point Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 2: Simultaneous state and parameter estimation //Journal of power sources. – 2006. – T. 161. – №. 2. – C. 1369-1384.
- [37] Plett G. L. Recursive approximate weighted total least squares estimation of battery cell total capacity //Journal of Power Sources. – 2011. – T. 196. – №. 4. – C. 2319-2331.
- [38] Pop V. et al. Battery management systems: Accurate state-of-charge indication for battery-powered applications. – Springer Science & Business Media, 2008. – T. 9.

- [39] Reece C. An introduction to electrochemical impedance spectroscopy //Jefferson Lab. – 2005.
- [40] Samadi M. F., Alavi S. M. M., Saif M. Online state and parameter estimation of the Li-ion battery in a Bayesian framework //American Control Conference (ACC), 2013. – IEEE, 2013. – C. 4693-4698.
- [41] Schöllhorn R., Kuhlmann R., Besenhard J. O. Topotactic redox reactions and ion exchange of layered MoO₃ bronzes //Materials Research Bulletin. – 1976. – T. 11. – №. 1. – C. 83-90.
- [42] Stetzel K. D. et al. Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman filter //Journal of Power Sources. – 2015. – T. 278. – C. 490-505.
- [43] Switching From Lithium-Ion Could Be Harder Than You Think. <https://www.greentechmedia.com/articles/read/switching-from-lithium-ion-could-be-harder-than-you-think>
- [44] Terejanu G. A. et al. Extended kalman filter tutorial //Department of Computer Science and Engineering, University at Buffalo. Available online: <https://homes.cs.washington.edu/~todorov/courses/cseP590/readings/tutorialEKF.pdf> (accessed on 16 February 2017). – 2008.
- [45] Valli E. Experiments on Animal Electricity with their application to Physiology and some pathological and medical observations [translated by W. Moorcroft]. – J. Johnson, 1793.
- [46] Verbrugge M., Tate E. Adaptive state of charge algorithm for nickel metal hydride batteries including hysteresis phenomena //Journal of Power Sources. – 2004. – T. 126. – №. 1-2. – C. 236-249.

- [47] Vetter J. et al. Ageing mechanisms in lithium-ion batteries //Journal of power sources. – 2005. – T. 147. – №. 1-2. – C. 269-281.
- [48] Von Handorf D. E. The Baghdad Battery: Myth or reality? //Plating and surface finishing. – 2002. – T. 89. – №. 5. – C. 84-87.
- [49] Waag W., Käbitz S., Sauer D. U. Experimental investigation of the lithium-ion battery impedance characteristic at various conditions and aging states and its influence on the application //Applied Energy. – 2013. – T. 102. – C. 885-897.
- [50] Weng C. et al. On-board state of health monitoring of lithium-ion batteries using incremental capacity analysis with support vector regression //Journal of Power Sources. – 2013. – T. 235. – C. 36-44.
- [51] Whittingham M. S. Electrical energy storage and intercalation chemistry //Science. – 1976. – T. 192. – №. 4244. – C. 1126-1127.
- [52] Zenati A. et al. Impedance measurements combined with the fuzzy logic methodology to assess the SOC and SOH of lithium-ion cells //Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2010 IEEE. – IEEE, 2010. – C. 1-6.